

第2章 「極限」

## 5. 極限値の性質

---

hm3-2-5

(pdf ファイル)

# 数列の極限の学習マップ

- ・ 基礎概念

収束と発散

極限值

$\infty$  (無限大)

- ・  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  の性質

- ・  $\infty - \infty$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$  の不定形

- ・ 等比数列の極限

- ・ 無限級数の定義

収束と発散

- ・  $\sum_{n=1}^{\infty}$  の性質

- ・ 無限等比級数

- ・ 無限級数の

収束の必要条件

発散の十分条件

# 極限值の基本性質

数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  が収束するとき,

$$\text{I} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (\text{ただし, } c \text{ は定数})$$

$$\text{II} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\text{III} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\text{IV} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\text{V} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \quad (\text{ただし } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0)$$

数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  が収束するとき,

$$\text{I} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad (\text{ただし, } c \text{ は定数})$$

$$\text{II} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\text{III} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

## 極限值の線型性

極限值の基本性質 I, II, III は, 次の一式にまとめることができる.

数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  が収束するとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \mu \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

ただし,  $\lambda, \mu$  は定数

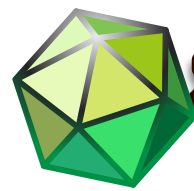
これを, 極限值についての **線型性** と呼ぶ.

**注**  $\lambda, \mu$  は, それぞれ,  $l, m$  に相当するギリシャ文字で [ラムダ], [ミュー] と読む.

数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  が収束するとき,

$$\text{IV} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$\text{V} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \quad (\text{ただし, } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0)$$



# 極限值の基本性質の使い道

極限值の基本性質を用いて，単純な数列の極限值をもとに，より複雑な数列の極限值が計算できる．

たとえば，

$$\blacksquare \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{2}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$$
$$=$$

$$\blacksquare \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2}{2n^2 - 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\quad}{\quad}$$

 極限值の計算例

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2}{2n^2 - 3n} = \lim_{n \rightarrow \infty}$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 2^n}{5^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty}$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 3^n}{4^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty}$$

### 例題

数列  $\left\{ \frac{r^n}{2 + r^n} \right\}$  の極限を  $r$  の値に応じて調べよ.

【解】 (1)  $|r| < 1$  のとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$  であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{2 + r^n} =$$

(2)  $r = 1$  のとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$  であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{2 + r^n} =$$

(3)  $r = -1$  のとき,

$$\frac{(-1)^n}{2 + (-1)^n} = \begin{cases} & (n \text{ は偶数}) \\ & (n \text{ は奇数}) \end{cases}$$

となるので, する.

(4)  $|r| > 1$  のとき,  $\left|\frac{1}{r}\right| < 1$  であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r}\right)^n = 0$$

ゆえに, 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{2 + r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty}$$