

第2章 「極限」

35. 連続関数の極限の不思議

hm3-2-35

(pdf ファイル)

例題

$$f_n(x) = \sum_{n=1}^n \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とするとき、関数 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ のグラフをかけ。

また、この関数が不連続となる x の値を求めよ。

[問題の背景]

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ とは、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}}$ のことである。

いうまでもなく、 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $\dots$ は連続関数の和であるから連続関数である。

そうであるのに、 $\dots$

【解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ は、初項が x^2 、公比が $\frac{1}{1+x^2}$ の等比級数の和である。

$x = 0$ のとき、この無限等比級数は 0 に収束する。

$x \neq 0$ のとき、 $0 < \frac{1}{1+x^2} < 1$ であるから、この等比級数は収束し、その和は

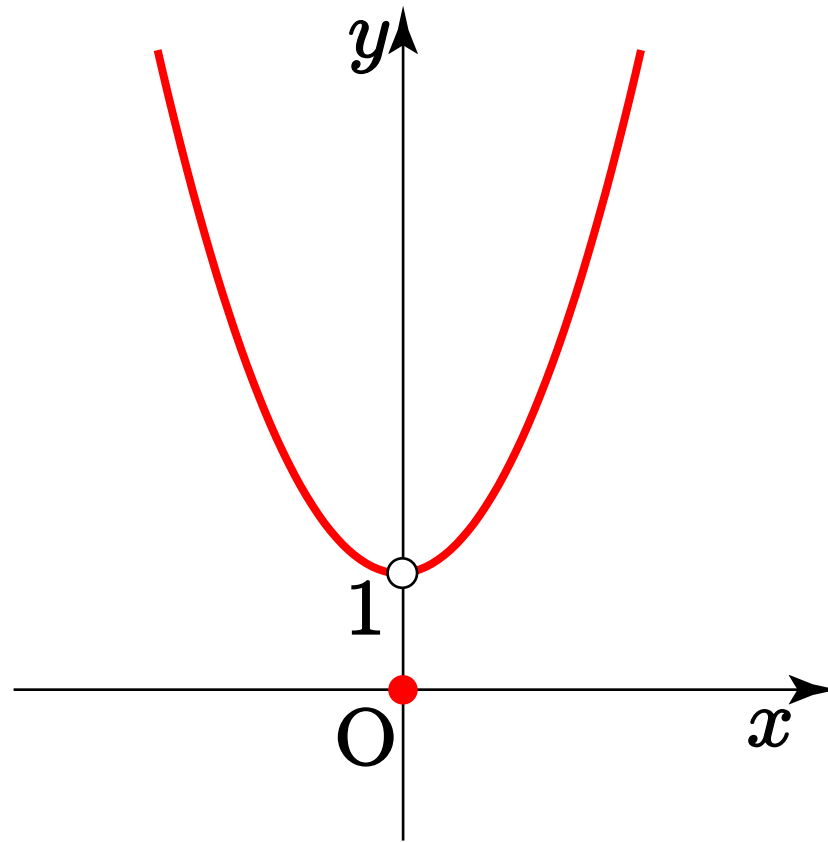
$$\text{ゆえに、} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ x^2 + 1 & (x \neq 0) \end{cases}$$

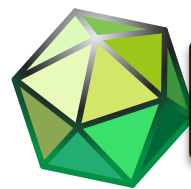
$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ のグラフ

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & (x = 0) \\ x^2 + 1 & (x \neq 0) \end{cases}$$

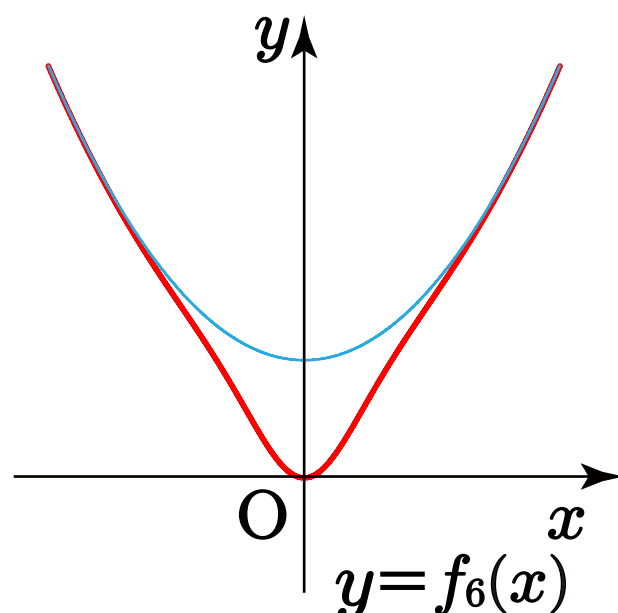
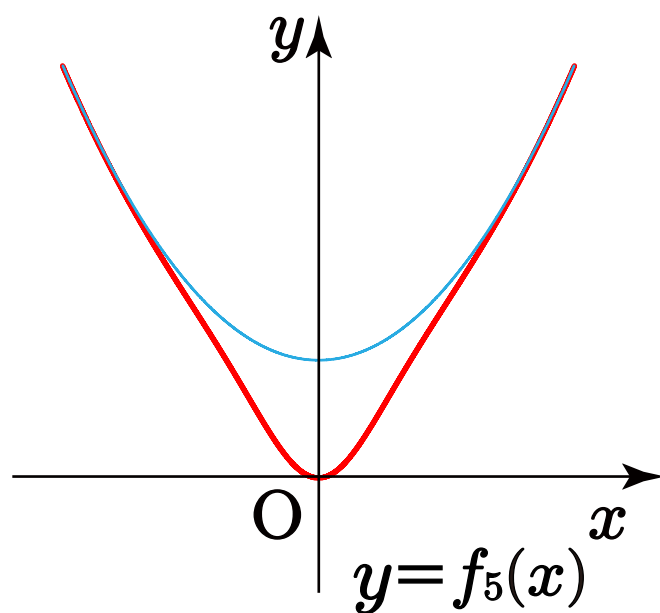
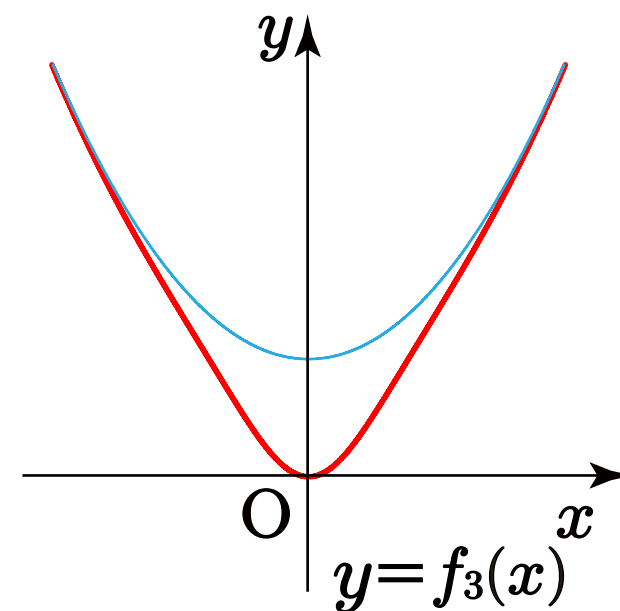
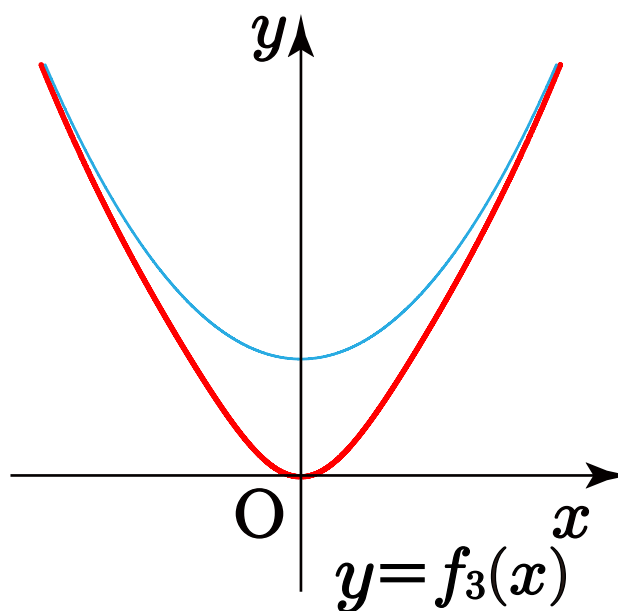
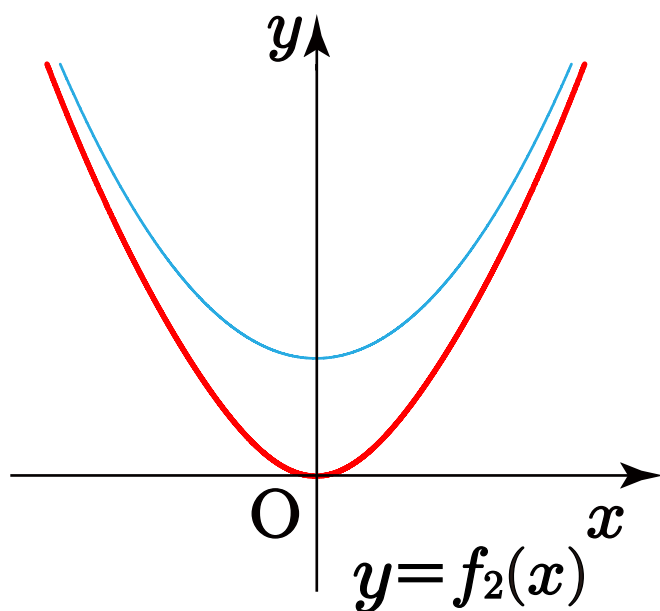
のグラフは下の図のようになる.

関数 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ は, $x = 0$ で不連続である.

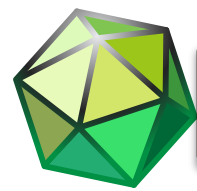




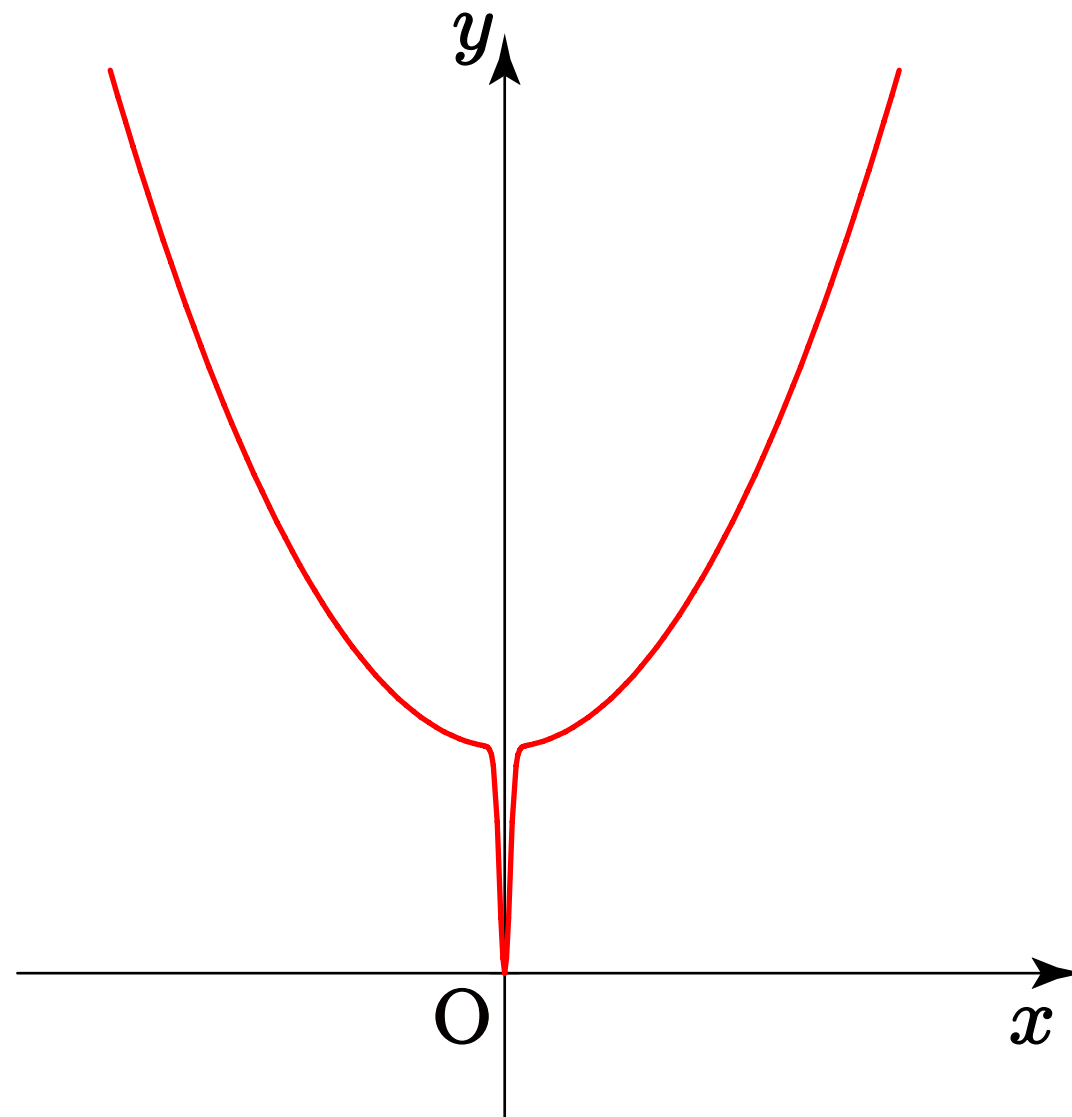
【発展】 $f_n(x)$ は連続関数である



...



【発展】 ところが n を大きくしていくと



$n = 1000$ のときの $y = f_n(x)$

n が有限である限り連続