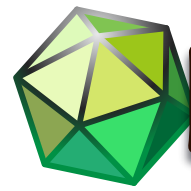


第2章 「極限」

34. 連続関数・不連続関数

hm3-2-34

(pdf ファイル)



関数の連続性（点連続の概念）

関数 $f(x)$ の定義域に属する x の値 a において

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

が成り立つとき、より詳しくいえば、

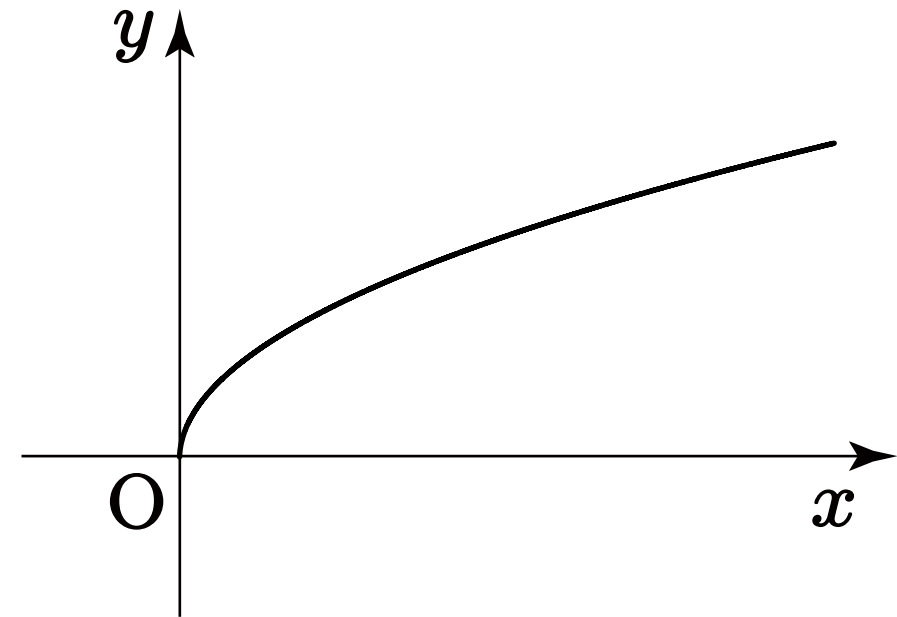
$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

が成り立つとき、 $f(x)$ は $x = a$ で連続であるという。また、関数 $f(x)$ が、 $x = a$ で連続でないとき、 $f(x)$ は $x = a$ で不連続であるという。

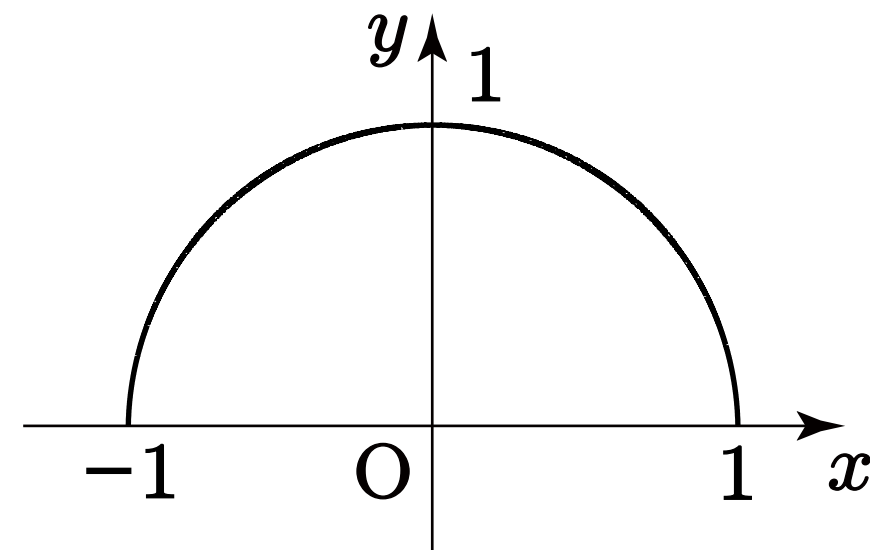
注意 $f(x)$ が点 a の片側だけで定義される場合には、 $x = a$ における連続性は片側の極限だけを考える。

片側連続の例

- $y = \sqrt{x}$ は, $x = 0$ で
連続 (右方連続) である.



- $y = \sqrt{1 - x^2}$ は,
 $x = \pm 1$ で連続である.
($x = 1$ では左方連続,
 $x = -1$ では右方連続)



区間と区間の記号

実数 a, b ($a < b$) に対して, 実数の集合

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

などを **区間** (interval) という.

また次のように, 無限に延びたものも, 区間と考える.

$$(a, \infty) = \{x \mid x > a\}, \quad (-\infty, b] = \{x \mid x \leq b\}$$

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は $(-\infty, \infty)$ と表される.

集合の記号を省略して, たとえば, **区間** $\{x \mid x \geq a\}$ を, 単に「**区間** $x \geq a$ 」と表現することもある.

また, 区間 $a < x < b$ を **开区間**, 区間 $a \leq x \leq b$ を **閉区間** という.

連続関数と不連続関数

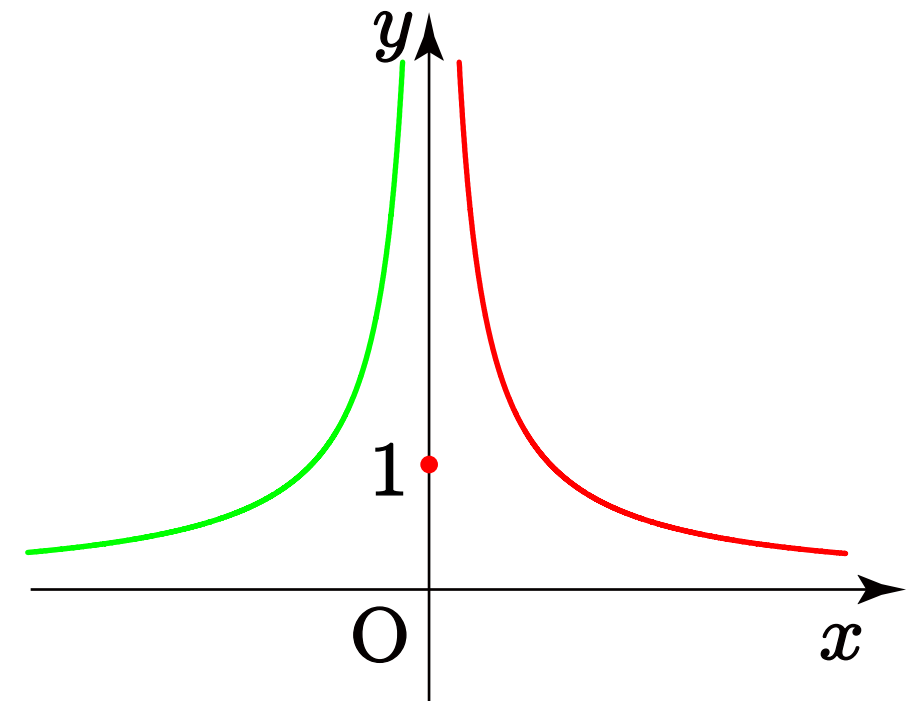
関数 $f(x)$ が区間 I のすべての x の値で連続であるとき、 $f(x)$ は **区間 I で連続** であるという。

関数 $f(x)$ が定義域全体で連続であるとき、 $f(x)$ は **連続関数** であるという。

◆ 例 $y = x^2$, $y = \sin x$, $y = 2^x$, $\dots$ は連続関数。

◆ 例

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x > 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x = 0 \text{ のとき}) \\ -\frac{1}{x} & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$



で定義される関数は、区間 $x > 0$,
区間 $x < 0$ で連続であるが、 $x = 0$ で不連続である
ので連続関数ではない。



連続関数の基本法則

定理

関数 $f(x)$, $g(x)$ がある区間 I でともに連続であるとき、関数

$$cf(x), f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x)g(x)$$

は、いずれも区間 I で連続である。ただし、 c は定数である。

また、 $g(x)$ が 0 でない点では、関数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ も連続である。