数学 III

第２章　「極限」

30. 三角関数の極限についての基本定理の証明

hm3-2-30

(pdf ファイル)

EDUPA

三角関数の極限についての最重要定理

x が微小のとき，$\sin x$ と x の比はほとんど1に等しい.

そして極限において，次式が成り立つ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

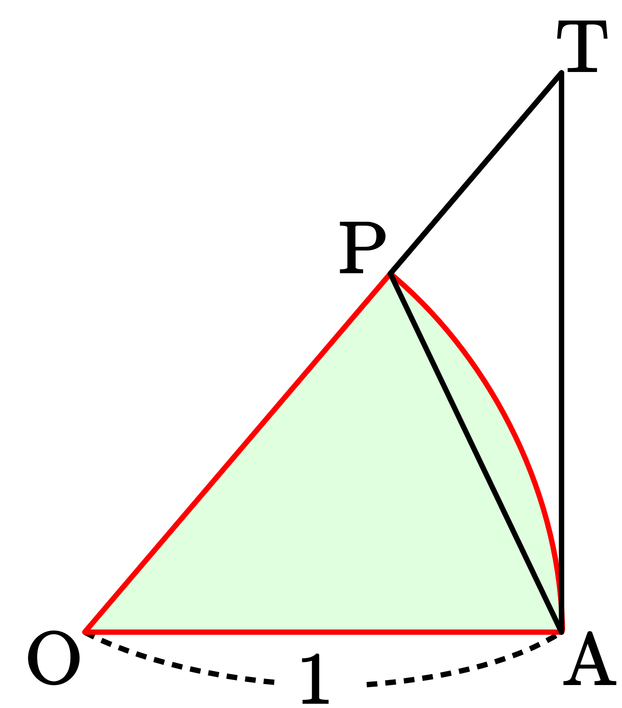
注　角はいうまでもなく弧度法である. また，角を表すのに θ を使う習慣から

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1 \quad や \quad \lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta}=1$$

と表すことも多い.

“$0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin x < x < \tan x$”の証明

証明 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ として，半径1の円Oの周上に2点A，Pをとり，$\angle \mathrm{AOP} = x$ となるようにする．Aにおける円Oの接線と半直線OPの交点をTとすれば，



三角形OAP，扇形OAP，三角形OAT の面積の間には次の大小関係がある．

$$\text{三角形OAP} < \text{扇形OAP} < \text{三角形OAT}$$

$$\therefore \qquad\qquad < \qquad\qquad < \qquad\qquad \blacksquare$$

“$\displaystyle\lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1$” の証明

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，　$\sin x < x < \tan x$

さらに，$\sin x > 0$ であるから，各辺を $\sin x$ で割ると

$<$　　$<$　　ゆえに，　　$> \dfrac{\sin x}{x} >$

ここで，$x \to +0$ の極限を考えれば，挟み撃ちの原理により，

$$\lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \blacksquare$$

“ $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ” の証明

$x < 0$ のときは，$u = -x$ とおくと u 　　0 となるから，

$$\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} =$$

が得られる．よって，

$$\lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \blacksquare$$

参考 　$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ は偶関数であるから，この証明結果は当然である．