

数学 III

第2章 「極限」

29. $x \rightarrow 0$ のときの $\sin x$ の ふるまい

hm3-2-29

(pdf ファイル)

極限の学習マップ

関数の極限

$x \rightarrow \infty$ のときの極限

- ・ 収束と発散
- ・ $\lim_{x \rightarrow \infty}$ の性質
- ・ $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形
(発散の速度)

$x \rightarrow \alpha$ のときの極限

- ・ 収束と発散
- ・ $\frac{0}{0}$ の不定形
(収束の速度)
- ・ 片側極限

理論上重要な極限值

- ・ $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x$
- ・ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- ・ $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

関数の連続性

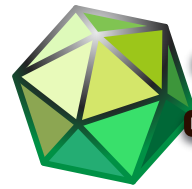
- ・ 点連続
- ・ 片側連続性
- ・ 区間連続
- ・ 中間値の定理

微小な x の値に対する三角関数 $\sin x$ の値

x	$\sin x$	$\frac{\sin x}{x}$
1	0.8414709848...	0.8414709848...
0.1	0.0998334166...	0.9983341664...
0.01	0.0099998333...	0.9999833334...
0.001	0.0009999998...	0.9999998333...
0.0001	0.0000999999...	0.999999983...
0.00001	0.0000099999...	0.999999999...

「差が0に近い」という意味だけでなく「比が1に近い」!

微小な量については、後者こそが重要である!



三角関数の極限についての最重要定理

x が微小のとき, $\sin x$ と x の比はほとんど 1 に等しい.

そして極限において, 次式が成り立つ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

注 角はいうまでもなく弧度法である. また, 角を表すのに θ を使う習慣から

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1 \quad \text{や} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\sin \theta} = 1$$

と表すことも多い.