

第2章 「極限」

28. 指数・対数関数の極限
の基本定理

hm3-2-28

(pdf ファイル)

極限の学習マップ

関数の極限

$x \rightarrow \infty$ のときの極限

- ・ 収束と発散
- ・ $\lim_{x \rightarrow \infty}$ の性質
- ・ $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形
(発散の速度)

$x \rightarrow \alpha$ のときの極限

- ・ 収束と発散
- ・ $\frac{0}{0}$ の不定形
(収束の速度)
- ・ 片側極限

理論上重要な極限值

- ・ $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x$
- ・ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- ・ $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

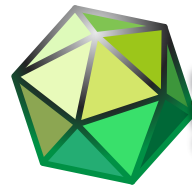
関数の連続性

- ・ 点連続
- ・ 片側連続性
- ・ 区間連続
- ・ 中間値の定理

微小な t の値に対する $(1+t)^{\frac{1}{t}}$ の値

コンピュータを使って数値的に計算すると次のようになる.

t	$(1+t)^{\frac{1}{t}}$	t	$(1+t)^{\frac{1}{t}}$
0.1	2.59374...	-0.1	2.86797...
0.01	2.70481...	-0.01	2.73199...
0.001	2.71692...	-0.001	2.71964...
0.0001	2.71814...	-0.0001	2.71841...
0.00001	2.71826...	-0.00001	2.71829...
0.000001	2.71828...	-0.000001	2.71828...
0.0000001	2.71828...	-0.0000001	2.71828...
.....			



指数・対数の極限についての最重要定理

$t \rightarrow 0$ のとき $(1+t)^{\frac{1}{t}}$ は一定の値に限りなく近づき、その値は

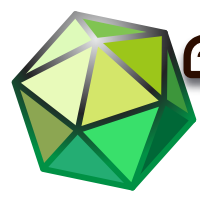
2.71828182845904523536028747135...

である。

この極限値を e で表す。すなわち、

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

e は、**Eulerの定数** あるいは **自然対数の底** と呼ばれる理論的に重要な定数である。

 “ $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ ” から分かること

$\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ であるから

$$\lim_{t \rightarrow +0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e, \quad \lim_{t \rightarrow -0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

ここで, $\frac{1}{t} = x$ とおくと

$$\lim_{x \rightarrow} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \quad \lim_{x \rightarrow} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x =$$

よって, 特に

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$



これを e の定義とする立場もある.