

26. 指数の極限

hm3-2-26

(pdf ファイル)



極限の学習マップ

関数の極限

$x \rightarrow \infty$ のときの極限

- ・収束と発散
- ・ $\lim_{x \rightarrow \infty}$ の性質
- ・ $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形
(発散の速度)

$x \rightarrow \alpha$ のときの極限

- ・収束と発散
- ・ $\frac{0}{0}$ の不定形
(収束の速度)
- ・片側極限

理論上重要な極限值

- ・ $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x$
- ・ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- ・ $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

関数の連続性

- ・点連続
- ・片側連続性
- ・区間連続
- ・中間値の定理

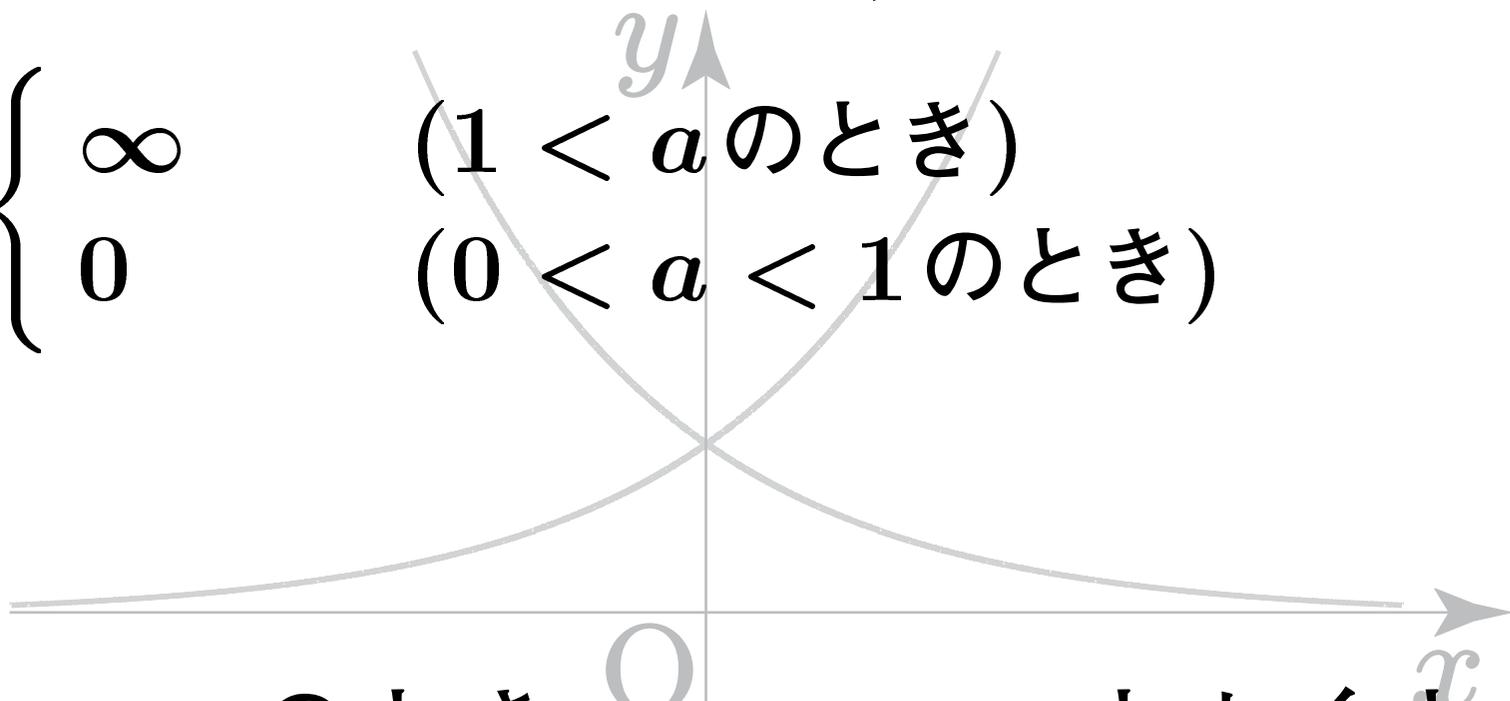


指数関数の極限

$0 < a, a \neq 1$ を満たす定数 a を底とする指数関数 $y = a^x$ の、 $x \rightarrow \infty$ のときの極限は、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty & (1 < a \text{ のとき}) \\ 0 & (0 < a < 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。



また、 $x \rightarrow -\infty$ のとき、 $u = -x$ とおくと $u \rightarrow \infty$ となるから、 $x \rightarrow -\infty$ の極限は、

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{u \rightarrow \infty} a^{-u} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a} \right)^u$$

のように $x \rightarrow \infty$ の極限に帰着される。



指数関数の極限 (まとめ)

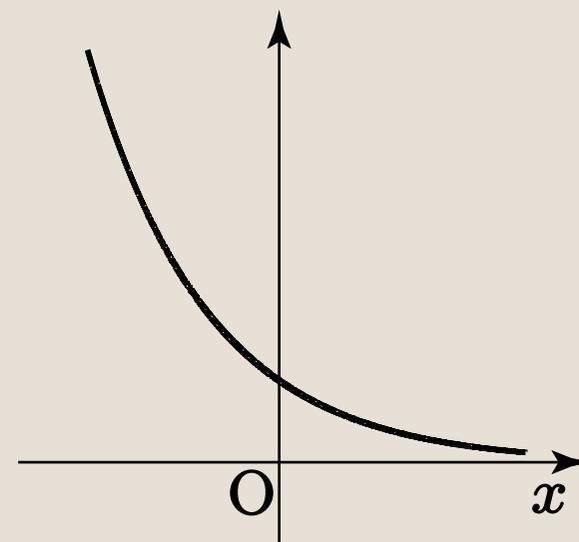
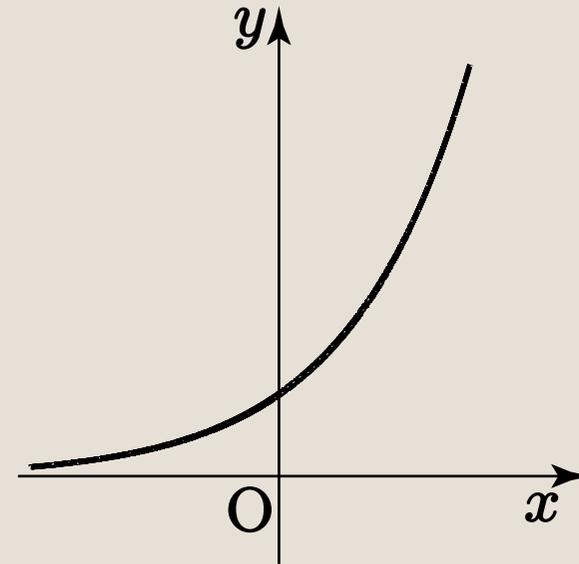
指数関数 $y = a^x$ の極限

$1 < a$ のとき

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0 \end{cases}$$

$0 < a < 1$ のとき

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty \end{cases}$$



【発展】 指数関数の極限について

指数関数の極限についてはグラフに基づいて納得するのが一般的.

しかし, 理論的には, すべての議論が

$$a > 1 \text{ のとき } \lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$$

の1つに帰着されること, そしてこれ自身は, 次の等比数列についての極限に帰着されることが重要である.

$$r > 1 \text{ のとき } \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$$

また, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2^x}$ や $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot 3^x$ のようなものも, やがて論じられる.