

第2章 「極限」

23. 片側極限

hm3-2-23

(pdf ファイル)

極限の学習マップ

関数の極限

$x \rightarrow \infty$ のときの極限

- ・ 収束と発散
- ・ $\lim_{x \rightarrow \infty}$ の性質
- ・ $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形
(発散の速度)

$x \rightarrow \alpha$ のときの極限

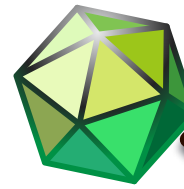
- ・ 収束と発散
- ・ $\frac{0}{0}$ の不定形
(収束の速度)
- ・ 片側極限

理論上重要な極限值

- ・ $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x$
- ・ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- ・ $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

関数の連続性

- ・ 点連続
- ・ 片側連続性
- ・ 区間連続
- ・ 中間値の定理



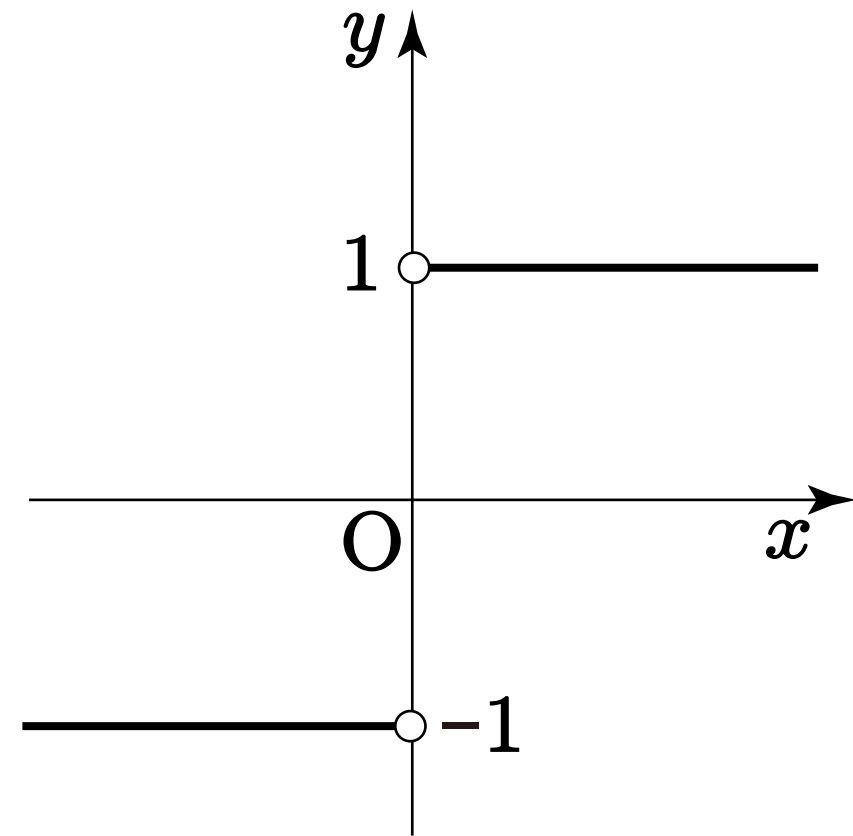
片側からの極限

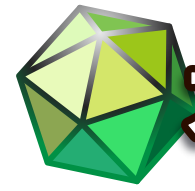
次のような関数を考える.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0 \text{ のとき}) \\ -1 & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

この関数 $f(x)$ は, $x > 0$ の範囲ではつねに $f(x) = 1$ であるから, x が $x > 0$ をみたしながら 0 に近づくときの, $f(x)$ の極限は 1 である.

同様に, x が $x < 0$ をみたしながら 0 に近づくときの, $f(x)$ の極限は -1 である.

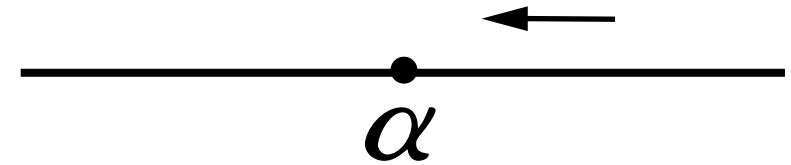




右側極限, 左側極限

一般に, x が右から α に近づくとき, すなわち, x が $x > \alpha$ を満たしながら α に限りなく近づくとき, $f(x)$ が定数 β に限りなく近づくならば,

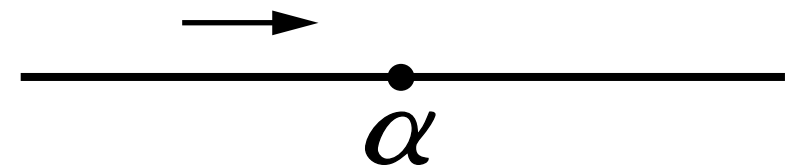
$$\lim_{x \rightarrow \alpha + 0} f(x) = \beta$$



と書く. このような極限を, **右側極限** という.

また, x が左から α に近づくとき, すなわち, x が $x < \alpha$ をみたしながら α に限りなく近づくとき, $f(x)$ が定数 γ に限りなく近づくなら,

$$\lim_{x \rightarrow \alpha - 0} f(x) = \gamma$$



と書く. このような極限を, **左側極限** という.

$+0$ と -0

関数 $f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0 \text{ のとき}) \\ -1 & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$ において,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -1$$

注 このように, $\alpha = 0$ のとき, $\alpha + 0$ や $\alpha - 0$ はそれぞれ単に, $+0$ や -0 と表す.

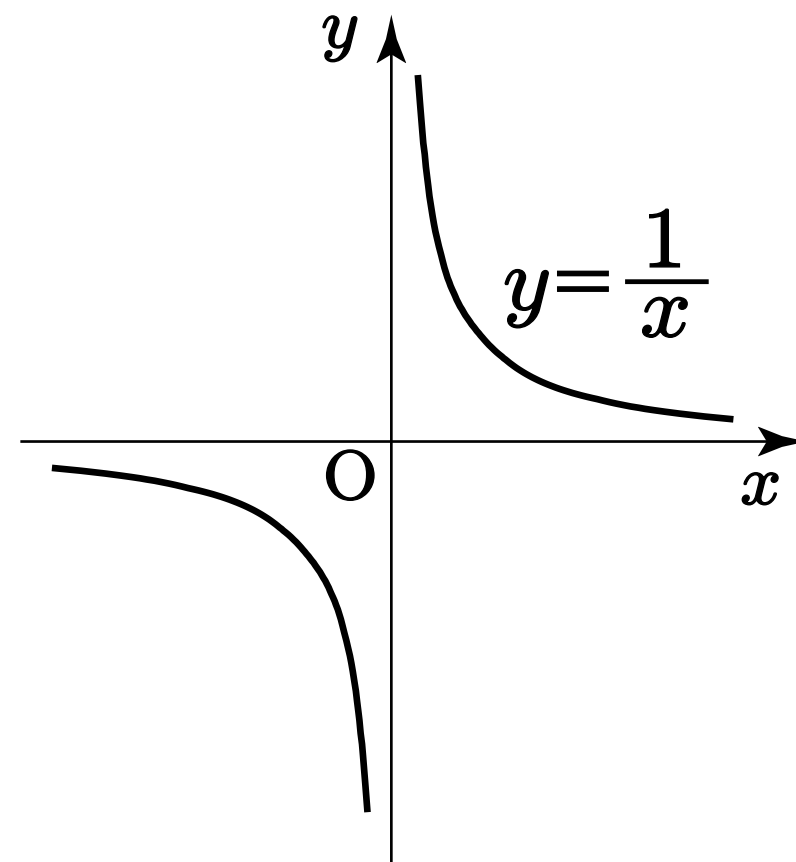
発散する片側極限

片側極限は，発散する場合にも考えられる．

例 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ を考えることはできない．しかし，

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty$$



注 これは，関数 $y = \frac{1}{x}$ の
グラフが y 軸を漸近線にもつ
ことを意味する．

参考 x 軸を漸近線にもつことは，
表される．

と