

第2章 「極限」

21.  $x \rightarrow \alpha$  のときの関数の極限

---

hm3-2-21

(pdf ファイル)

### 例題

極限  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$  を調べよ.

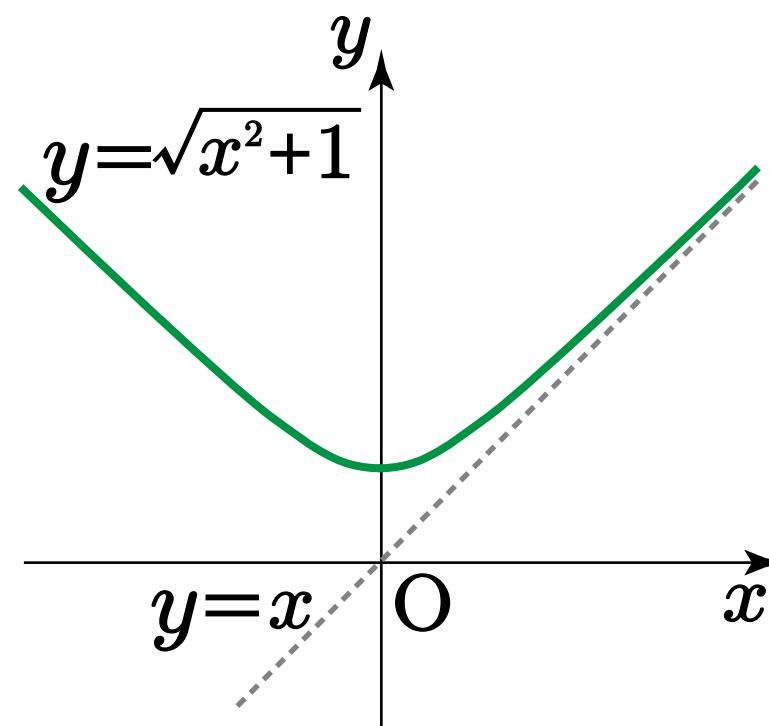
$$\begin{aligned} \text{【解】 } \sqrt{x^2 + 1} - x &= \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \\ &= \end{aligned}$$

# $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0$ の意味

$\sqrt{x^2 + 1} - x$  は、同じ  $x$  の値に対する、曲線  $y = \sqrt{x^2 + 1}$  と直線  $y = x$  の  **$y$  座標の差** である。

この差が  $x \rightarrow \infty$  で 0 に収束することは、 $x$  が限りなく大きくなるとき、曲線と直線が互いに限りなく接近することを意味する。

つまり、曲線  $y = \sqrt{x^2 + 1}$  は、直線  $y = x$  を **漸近線** にもつ。



### 例題

$f(x) = \frac{x^3 + 2x}{3x^2 + 1}$  とするとき、次の等式が成り立つように、定数  $a, b$  を定めよ.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - (ax + b)\} = 0$$

【解】 極限值を考えるべき関数の式は、通分などによって、次のように変形できる.

$$\begin{aligned} & f(x) - (ax + b) \\ &= \frac{\phantom{x^3 + 2x}}{3x^2 + 1} \\ &= \end{aligned}$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-3a)x + (2-3b) - \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2}}{3 + \frac{1}{x^2}} = 0$$

したがって、求める条件は

すなわち、



## 【別解】 $y = \frac{x + 2x^2}{3x^2 + 1}$ のグラフ

$y = \frac{x^3 + 2x^2}{3x^2 + 1}$  のグラフは、次のようになる.

(微分法の知識があれば、独力で描くことも可能である. また,

$$y = \frac{x^3 + 2x^2}{3x^2 + 1} = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + \frac{-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{3x^2 + 1}$$

という変形も、グラフを描くのに有効である.)

このグラフは、直線  $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$  を漸近線にもつ.

