

数学 III

第2章 「極限」

18. $x \rightarrow \infty$ のときの極限値の性質

hm3-2-18

(pdf ファイル)

極限の学習マップ

関数の極限

$x \rightarrow \infty$ のときの極限

- ・ 収束と発散
- ・ $\lim_{x \rightarrow \infty}$ の性質
- ・ $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形
(発散の速度)

$x \rightarrow \alpha$ のときの極限

- ・ 収束と発散
- ・ $\frac{0}{0}$ の不定形
(収束の速度)
- ・ 片側極限

理論上重要な極限值

- ・ $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x$
- ・ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- ・ $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

関数の連続性

- ・ 点連続
- ・ 片側連続性
- ・ 区間連続
- ・ 中間値の定理



$x \rightarrow \infty$ のときの関数の極限値の性質

関数の極限値の基本性質

$x \rightarrow \infty$ のとき、関数 $f(x)$, $g(x)$ が収束するなら、

$$\text{I } \lim_{x \rightarrow \infty} c f(x) = c \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad (c \text{ は定数})$$

$$\text{II } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$$

$$\text{III } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$$

$$\text{IV } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$$

$$\text{V } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)} \quad \left(\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \neq 0 \right)$$

上の基本性質は $x \rightarrow -\infty$ の場合も同様に成り立つ。



関数の極限値の計算例

極限値の基本性質は，次のように用いることができる．

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x - 3} =$$



$$\infty \times 1, \frac{1}{\infty}, \infty \times \infty, \infty + \infty$$

極限值の基本性質は，関数が発散する場合についても成立すると考えても良い場合がある．

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 4) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3} \right)$$

$$=$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{x} =$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \log x =$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 2^x) =$$