数学 III

第２章　「極限」

16. 級数が収束するための必要条件

hm3-2-16

(pdf ファイル)

EDUPA

数列の極限の学習マップ

- 基礎概念

  収束と発散

  極限値

  ∞ (無限大)
- $\lim\limits_{n\to\infty}$ の性質
- $\infty-\infty$, $\dfrac{\infty}{\infty}$ の不定形
- 等比数列の極限

- 無限級数の定義

  収束と発散
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ の性質
- 無限等比級数
- 無限級数の

  収束の必要条件

  発散の十分条件

無限級数が収束するための必要条件

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に対し，部分和を

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

とおく.

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束して和 S をもつならば,

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = S$，したがってまた，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$

であるから,

$$a_n = S_n - S_{n-1} \qquad \therefore \quad \lim_{n\to\infty} a_n =$$

収束の必要条件，発散の十分条件

$$級数 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{が収束する} \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = 0$$

対偶をとると，次の形になる.

数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束しない

$$\Longrightarrow \text{無限級数} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ は発散する}$$

発散する級数の例

◪　無限級数

$$1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\cdots+\frac{n}{2n-1}+\cdots$$

の第 n 項 $\dfrac{n}{2n-1}$ の極限は，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=$$

であり，したがって，この級数は　　　　　　　する．

◪　無限級数

$$\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\sqrt{n}+\cdots$$

の第 n 項 $(-1)^{n-1}\sqrt{n}$ は発散する．当然，0 に収束しない．したがって，この級数は発散する．

級数の収束の十分条件？

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であっても，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束するとは限らない．

たとえば，$a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ や，$a_n = \dfrac{1}{n}$ のとき，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ が成り立つが，無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する．

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ は，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束の必要条件にすぎない！