

第2章 「極限」

14. 無限等比級数の応用

hm3-2-14

(pdf ファイル)

数列の極限の学習マップ

- ・ 基礎概念

収束と発散

極限值

∞ (無限大)

- ・ $\lim_{n \rightarrow \infty}$ の性質

- ・ $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形

- ・ 等比数列の極限

- ・ 無限級数の定義

収束と発散

- ・ $\sum_{n=1}^{\infty}$ の性質

- ・ 無限等比級数

- ・ 無限級数の

収束の必要条件

発散の十分条件

「循環小数は有理数」

$$c = 0.\dot{6}\dot{3} = 0.636363\ldots \text{ は,}$$

$$c = 0.63 + 0.0063 + 0.000063 + 0.00000063 + \ldots$$

$$= \frac{63}{100} + \frac{63}{100^2} + \frac{63}{100^3} + \frac{63}{100^4} + \ldots$$

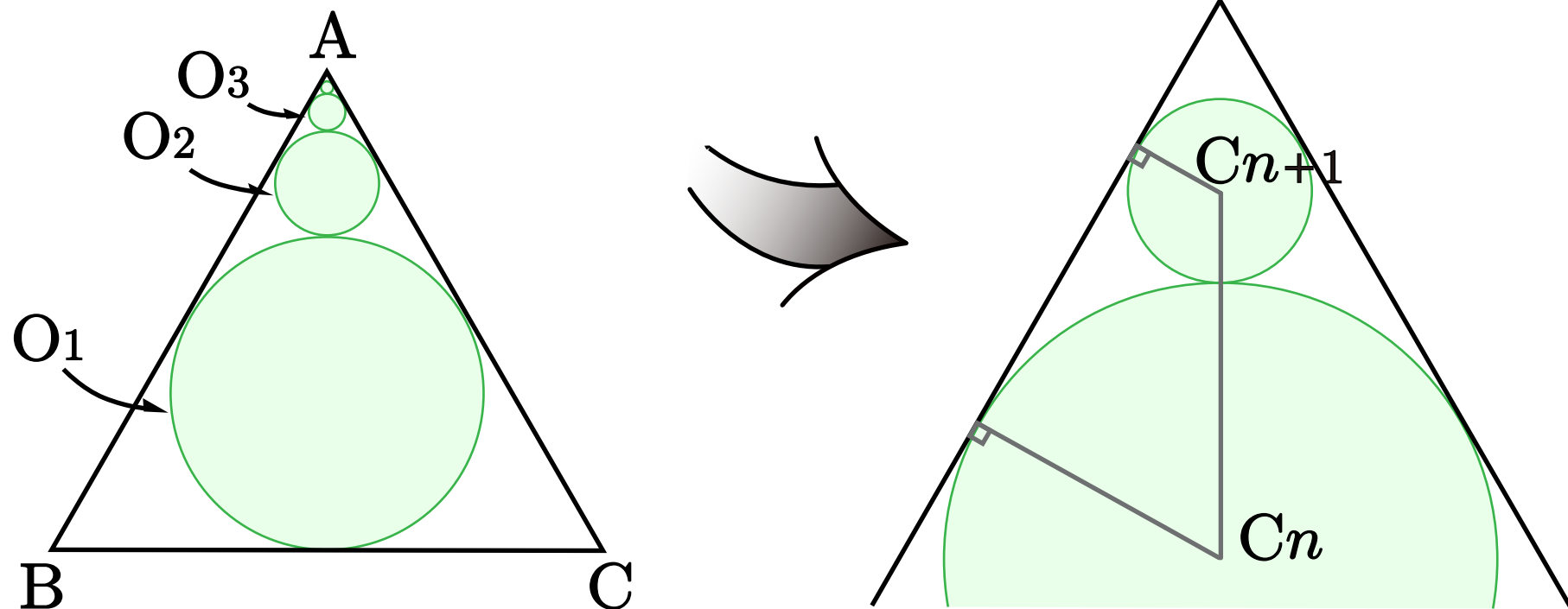
のように, 初項 $\frac{63}{100}$, 公比 $\frac{1}{100}$ の無限等比級数の和である.

したがって,

$$c = \text{—————} =$$

例題

正三角形 ABC に内接する半径 1 の円を O_1 とし、
辺 AB , AC と円 O_1 に接する円を O_2 とする。以下、
同様にして、辺 AB , AC と円 O_n ($n = 1, 2, 3, \dots$)
に接する円 O_{n+1} を A に近づく方向に次々つくるとき、
これらの円の面積の総和 S はどうなるか。



【解】円 O_n の中心を C_n ，半径を r_n とし，円 O_{n+1} の中心 C_{n+1} を通り， AB に平行な直線と C_n から AB に引いた垂線との交点を H_n とする．

$\triangle C_n C_{n+1} H_n$ において，

$$\angle C_n C_{n+1} H_n = 30^\circ, \quad \angle C_n H_n C_{n+1} = 90^\circ$$

であることから，

$$C_n C_{n+1} = 2 C_n H_n \quad \therefore r_n + r_{n+1} = 2(r_n - r_{n+1})$$

すなわち

これが任意の自然数 n について成り立つので，求める面積の総和 S は，初項 ， 公比 の無限等比級数の和と考えることができるので，

$$S =$$

