

第2章 「極限」

13. 無限等比級数

hm3-2-13

(pdf ファイル)

数列の極限の学習マップ

- 基礎概念

収束と発散

極限值

∞ (無限大)

- $\lim_{n \rightarrow \infty}$ の性質

- $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形

- 等比数列の極限

- 無限級数の定義

収束と発散

- $\sum_{n=1}^{\infty}$ の性質

- 無限等比級数

- 無限級数の

収束の必要条件

発散の十分条件



無限等比級数

初項 a , 公比 r の無限等比数列 $\{ar^{n-1}\}$ から作られる無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

を, 初項 a , 公比 r の無限等比級数 という. 例えば,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$
 は初項 1, 公比 $\frac{1}{2}$

の無限等比級数である. この第 n 部分和 S_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} =$$

であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n =$

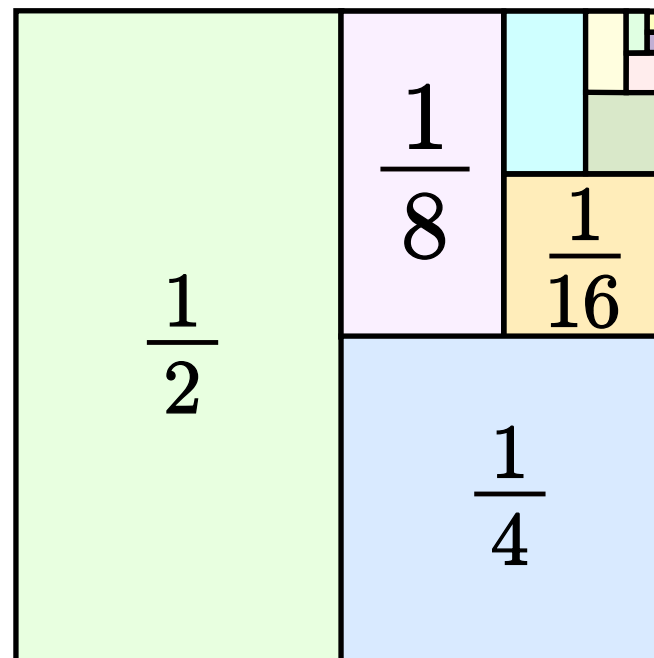
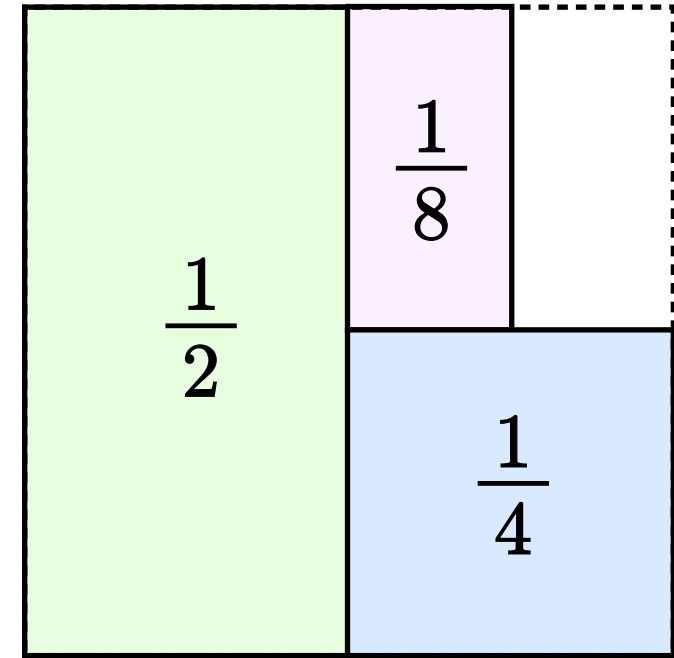
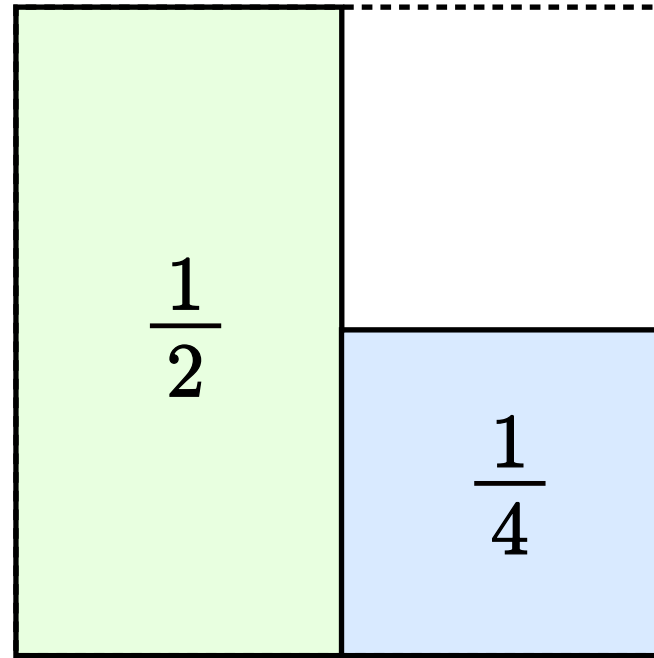
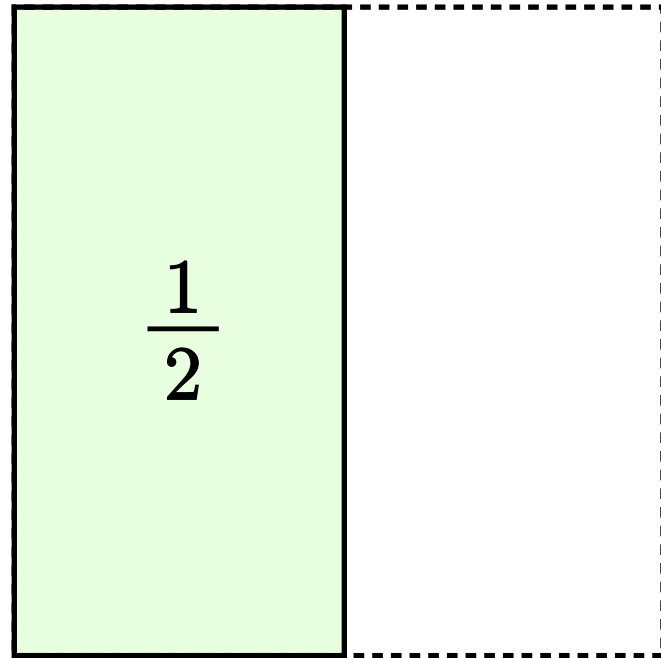
であるから, この無限

級数は

して, 和

をもつ.

人間の知性の極限





無限等比級数の和

初項 a , 公比 r の **無限等比級数** の第 n 項までの部分和 S_n は,

$$S_n = \begin{cases} \frac{a(1-r^n)}{1-r} & (r \neq 1) \\ an & (r = 1) \end{cases}$$

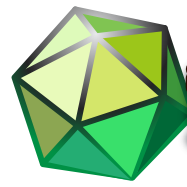
のように表される. よって, $a \neq 0$ の場合には,

1. $|r| < 1$ のとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

2. $r > 1$, $r \leq -1$ のとき, $\{r^n\}$ は発散するので, $\{S_n\}$ も発散する.

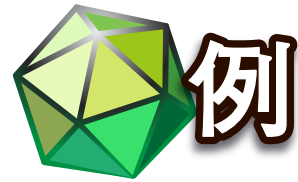
3. $r = 1$ のとき, $\{S_n\}$ は明らかに発散する.



無限等比級数の収束と発散のまとめ

$a \neq 0$ のとき, 無限等比級数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ の収束, 発散
は, 次のようになる.

$ r < 1$ のとき	$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$
$ r \geq 1$ のとき	$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ は発散



■ 無限等比級数

$$4 - 2 + 1 - \dots + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots$$

は，初項が 4，公比が $-\frac{1}{2}$ である．

この級数は収束し，その和は，

■ 無限等比級数

$$2 + 3 + \frac{9}{2} + \dots + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} + \dots$$

は，初項が 2，公比が $\frac{3}{2}$ である．

この級数は する．