

第2章 「極限」

11. 無限級数

hm3-2-11

(pdf ファイル)

数列の極限の学習マップ

- 基礎概念

収束と発散

極限值

∞ (無限大)

- $\lim_{n \rightarrow \infty}$ の性質

- $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形

- 等比数列の極限

- 無限級数の定義

収束と発散

- $\sum_{n=1}^{\infty}$ の性質

- 無限等比級数

- 無限級数の

収束の必要条件

発散の十分条件

無限級数

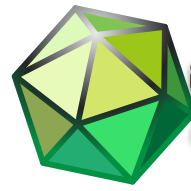
無限数列 $\{a_n\}$ のすべての項を加え合わせるという形の式

$$\sum_{k=1}^{\infty} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

を **無限級数** または、単に **級数** (series) という。

しかし、無限個の数は、実際にすべてを加え合わせることとはできない！

そこで、まず上の形の式の意味をきちんと定めよう。



無限級数の和の考え方

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 (第 n 部分和)

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

が作る数列

$$\begin{aligned}\{S_n\} &= \{S_1, S_2, S_3, \cdots\} \\ &= \{a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \cdots\}\end{aligned}$$

が、収束して極限值をもつとき、その極限值によって

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ を定義する.

無限級数の和の定義

与えられた数列 $\{a_n\}$ に対し, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ が作る

数列 $\{S_n\}$ が収束して, 極限值

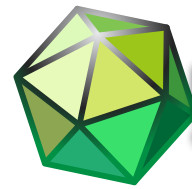
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = S$$

をもつとき,

「無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は収束して, 和 S をもつ」

といい, 「 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S$ 」

または, 「 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ 」 と書く.



無限級数の和の定義の核心

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ とは } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k \text{ のことである.}$$

たとえば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 9 \left(\frac{1}{10} \right)^k =$$

であることを

$$0.9 + 0.09 + 0.009 + 0.0009 + \cdots = 1$$

と表現するに過ぎない. これが $0.9999\cdots = 1$ の意味である.



発散する無限級数

部分和がつくる数列 $\{S_n\}$ が発散するとき，無限級数は **発散** するといい，その **和は定義できない**．

これを「**発散する無限級数は和をもたない**」という．

たとえば， $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n$ は定義されない．

ただし，級数が正の無限大や負の無限大に発散する場合は，それぞれ，次のように書く．

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n = \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} = -\infty$$