

第2章 「極限」

1. 数列の極限值

hm3-2-1

(pdf ファイル)

極限の学習マップ

数列の極限

- ・ 基礎概念
収束と発散
極限值
 ∞ (無限大)
- ・ $\lim_{n \rightarrow \infty}$ の性質
- ・ $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形
- ・ 等比数列の極限

- ・ 無限級数の定義
収束と発散
- ・ $\sum_{n=1}^{\infty}$ の性質
- ・ 無限等比級数
- ・ 無限級数の
収束の必要条件
発散の十分条件

関数の極限

- ・ $x \rightarrow \infty$ のときの極限
(収束と発散)
 $\lim_{x \rightarrow \infty}$ の性質

- ・ $x \rightarrow \alpha$ のときの極限
(収束と発散)
片側極限

- ・ 関数の連続性・不連続性
中間値の定理

数列の極限の学習マップ

- ・ 基礎概念

収束と発散

極限值

∞ (無限大)

- ・ $\lim_{n \rightarrow \infty}$ の性質

- ・ $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形

- ・ 等比数列の極限

- ・ 無限級数の定義

収束と発散

- ・ $\sum_{n=1}^{\infty}$ の性質

- ・ 無限等比級数

- ・ 無限級数の

収束の必要条件

発散の十分条件

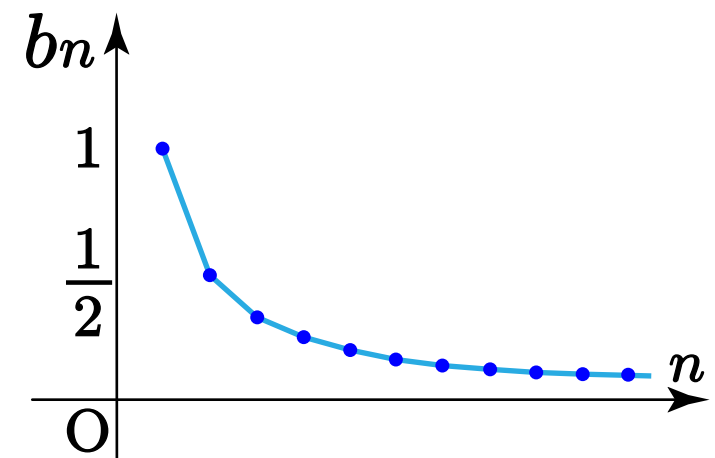
数列の「振る舞い」

無限数列において、 n が限りなく大きくなっていくとき、その第 n 項がどのような《振る舞い》をするかは、いろいろな場合がある。

■ 数列 $\{a_n\} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ の第 n 項 $a_n = n$ は、 n が大きくなるに従って、限りなく大きくなっていく。

■ 数列 $\{b_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$

の第 n 項 $b_n = \frac{1}{n}$ は、 n が大きくなるに従って、限りなく 0 に近づいていく。



もう一つの例

数列 $\left\{ \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots \right\}$ の第 n 項は,
 n が大きくなるに従って, どのように振舞うであろう?

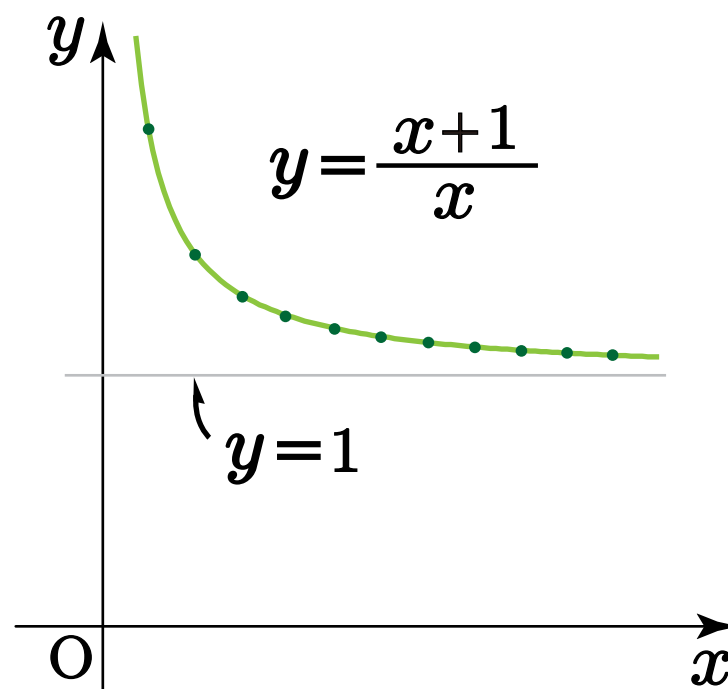
$y = \frac{x+1}{x}$ のグラフ上に,

点 $\left(n, \frac{n+1}{n} \right)$ をとっていく
と, それが限りなく 1 に近づ
くことがわかる.

このことは, 数列を

$$\left\{ 1 + \frac{1}{1}, 1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{4}, \dots, 1 + \frac{1}{n}, \dots \right\}$$

と書き直すことによって, より良く分かる.





「収束」と「極限值」

数列 $\{a_n\}$ において, n が限りなく大きくなるにつれて, a_n が, ある定数 α に限りなく近づくとする.

このとき, 「数列 $\{a_n\}$ は α に **収束** する」といい,

$$\left[n \rightarrow \infty \quad \text{のとき} \quad a_n \rightarrow \alpha \right]$$

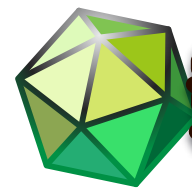
または,

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \right]$$

と書く.

定数 α を, 数列 $\{a_n\}$ の **極限值** といい, また, 「数列 $\{a_n\}$ は極限值 α をもつ」という.

注 ∞ は **無限大** と読む. ∞ は, 通常の数とは異なる. なお, 「 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \rightarrow \alpha$ 」とは書かない.



数列の極限值の例

$$\blacksquare \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} =$$

$$\blacksquare \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} =$$

$$\blacksquare \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$

$$\blacksquare \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right) =$$

$$\blacksquare \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{(-1)^n}{n}\right) =$$