数学 III

第１章　「関数」

12. 三角関数の複雑な公式（２）

hm3-1-12

(pdf ファイル)

EDUPA

三角関数の加法定理の発展公式の基礎

正弦の加法定理の 2式

$$(1)\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$(2)\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

余弦の加法定理の 2式

$$(3)\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$(4)\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

の和や差から，興味深い公式を導くことができる.

この後に登場する公式は，形が複雑であるが，以上の４式の知識が確実なら機械的に覚える必要はない.

和を積になおす公式

$$\begin{cases} A = \alpha + \beta \\ B = \alpha - \beta \end{cases}$$ となる2数 $\alpha,\ \beta$ を用いると

$$\begin{aligned} \sin A + \sin B &= \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \\ &= 2 \sin \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

ここで, $\alpha =$ 　　　　　　　　, $\beta =$ 　　　　　　　　 であるから,

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2}$$

が得られる.

$\sin A - \sin B,\ \cos A + \cos B,\ \cos A - \cos B$

についても同様の関係を導くことができる.

和を積になおす公式

$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A + \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

例

(1) $\sin 4\theta + \sin\theta =$

(2) $\sin 4\theta - \sin\theta =$

(3) $\cos 5\theta + \cos 3\theta =$

(4) $\cos 3\theta - \cos\theta =$

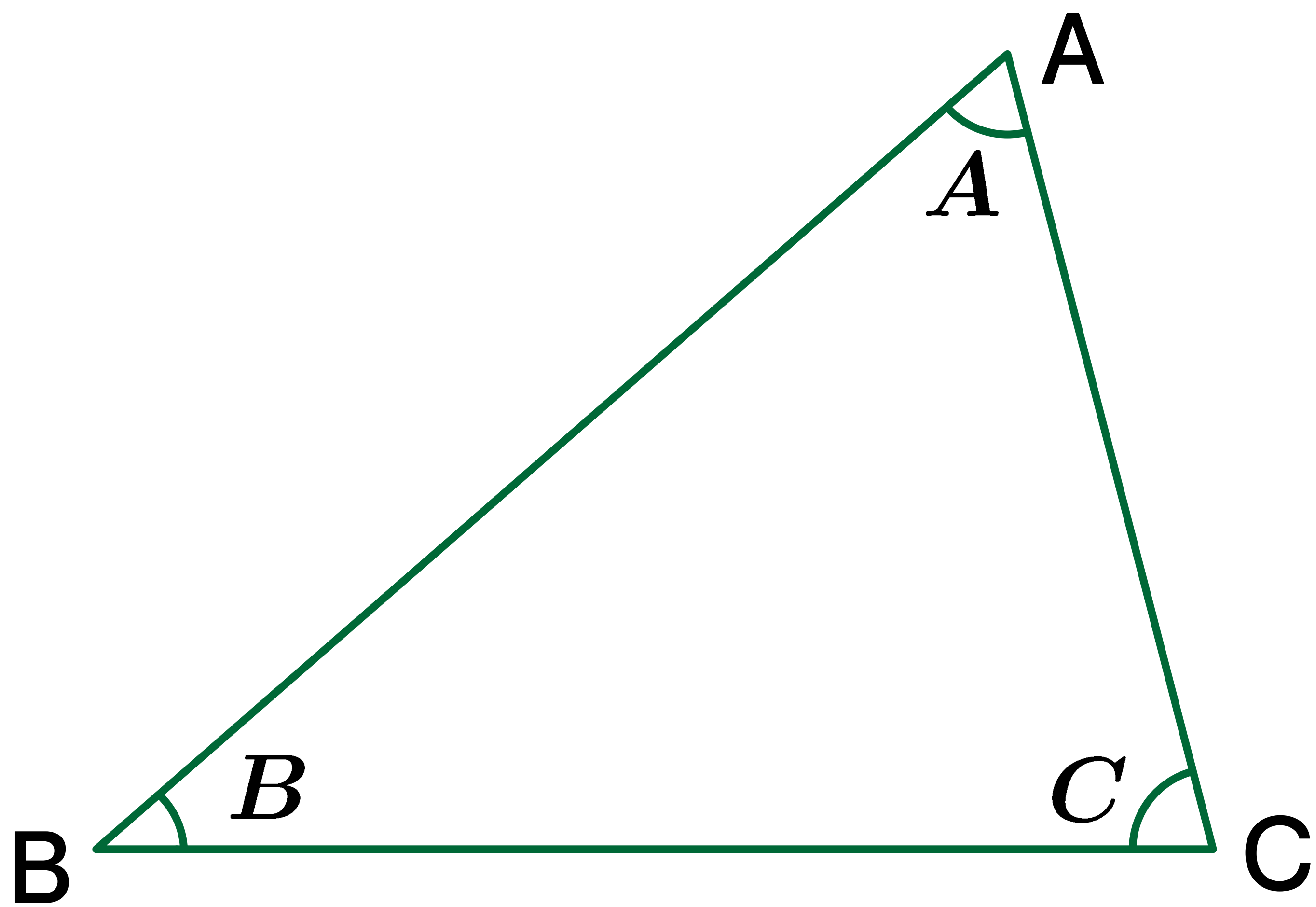
例

例題

$A+B+C=\pi$ のとき，等式

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

が成り立つことを証明せよ.



証明 和を積になおす公式により，

$$\sin A + \sin B =$$

また，$C = \pi - A - B$ から，

$$\sin C =$$

したがって，

$$\sin A + \sin B + \sin C$$

$$=$$

∎