

第1章 「関数」

11. 三角関数の複雑な公式(1)

hm3-1-11

(pdf ファイル)

三角関数の加法定理の発展公式の基礎

正弦の加法定理の **2式**

$$(1) \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$(2) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

余弦の加法定理の **2式**

$$(3) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$(4) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

の和や差から，興味深い公式を導くことができる。

この後に登場する公式は，形が複雑であるが，以上の4式の知識が確実なら機械的に覚える必要はない。

積を和になおす公式(1)

正弦関数の加法定理の公式の辺々の和と差をとると、

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \sin \beta$$

積を和になおす公式(1)

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) \}$$

注意

これら2式は、実際上同じものである。

積を和になおす公式(2)

同様に，余弦の加法定理

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

の，辺々の和と差をとることを通じて，次の公式が得られる。

積を和になおす公式(2)

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) \}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$$



$$(1) \quad \sin 2\theta \cos \theta =$$

$$(2) \quad \cos 2\theta \sin 3\theta =$$

$$(3) \quad \sin \theta \sin 3\theta =$$

$$(4) \quad \cos 2\theta \cos 3\theta =$$