数学 III

第１章　「関数」

10. 逆関数の理論と実践

---

hm3-1-10

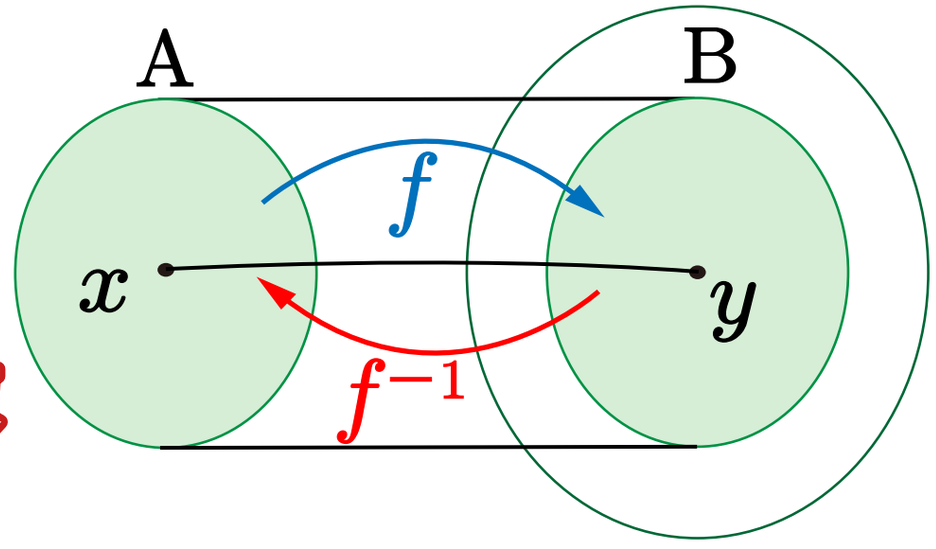
(pdf ファイル)

逆関数

関数 $y = f(x)$ の定義域を A，値域を B とする．

B の任意の要素 y に対し，$f(x) = y$ となる要素 x が，A の中にただ一つ存在する

とき，x は y の関数となる．



これを

$$x = f^{-1}(y)$$

と表し，$y = f(x)$ の **逆関数** という．

注　f^{-1} は［エフインバース］と読む．

関数についての伝統（慣習）

関数を表すときは，変数には x を，関数を表すのには y を使う慣習がある.

この慣習から，関数 $y = f(x)$ の逆関数

$$x = f^{-1}(y)$$

を表すときに，敢えて，**x と y を入れ替えて**，

$$y = f^{-1}(x)$$

の形にしたものを $y = f(x)$ の逆関数と呼ぶことが高校以下では多い.

逆関数の機械的な計算例

$f(x) = 3x - 4$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めるには，$y = f(x)$ とおき，$y =$ を x について解いて

$x =$

ここで，x と y を交換して，

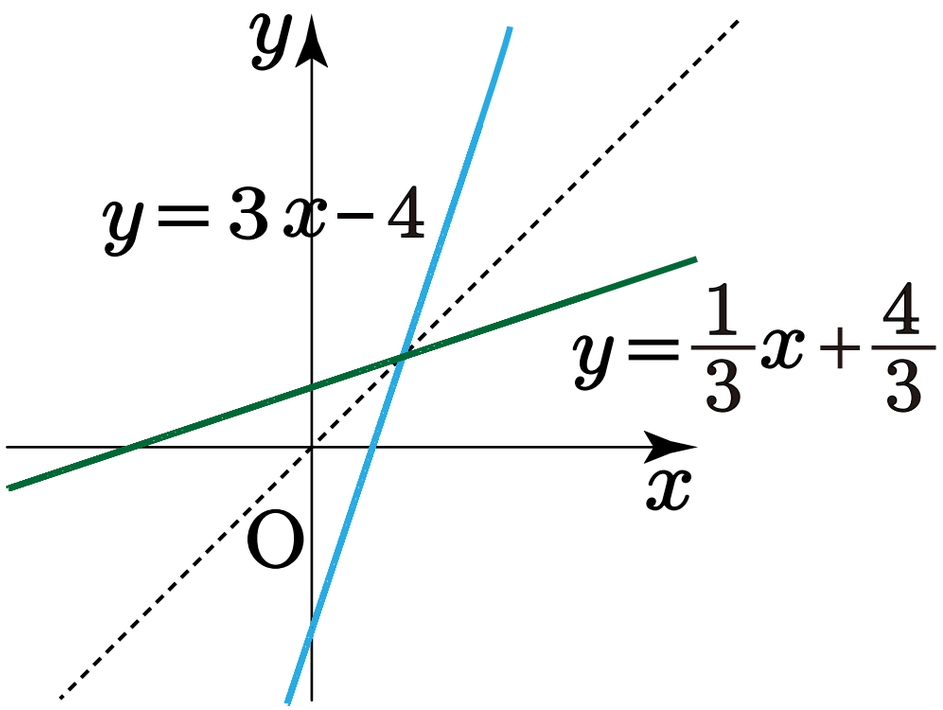
したがって，　$f^{-1}(x) =$

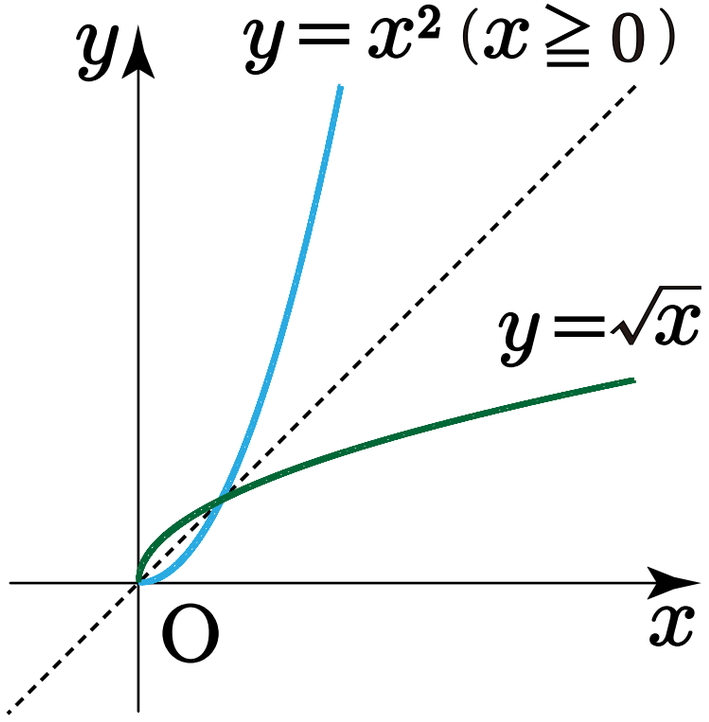
1次関数はその逆関数も1次関数！

同様に，　$g(x) = x^2 \ (x \geqq 0)$ の逆関数は，

$g^{-1}(x) =$

逆関数のグラフ



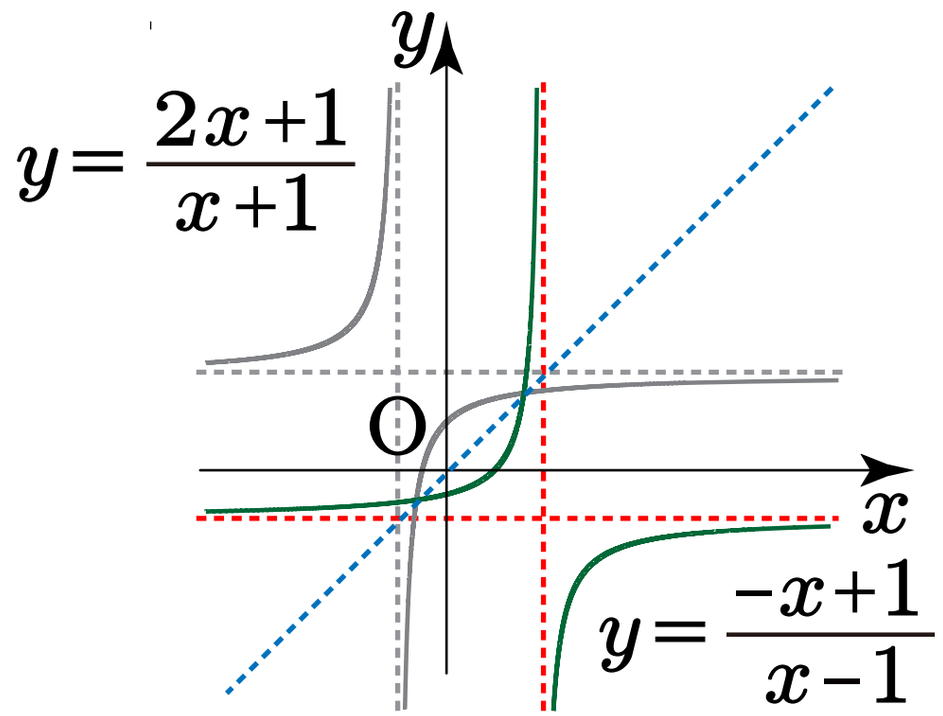


逆関数のグラフ

関数 $y = f(x)$ のグラフと，逆関数 $y = f^{-1}(x)$ のグラフは，直線 $y = x$ に関して対称である.

分数関数の逆関数

関数 $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めるには，$y=f(x)$ とおき，x について解く．



x と y を交換して，

したがって，　　$f^{-1}(x)=$

1次分数関数はその逆関数も1次分数関数！

指数関数の逆関数

例 関数 $f(x)=2^x$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めるには，

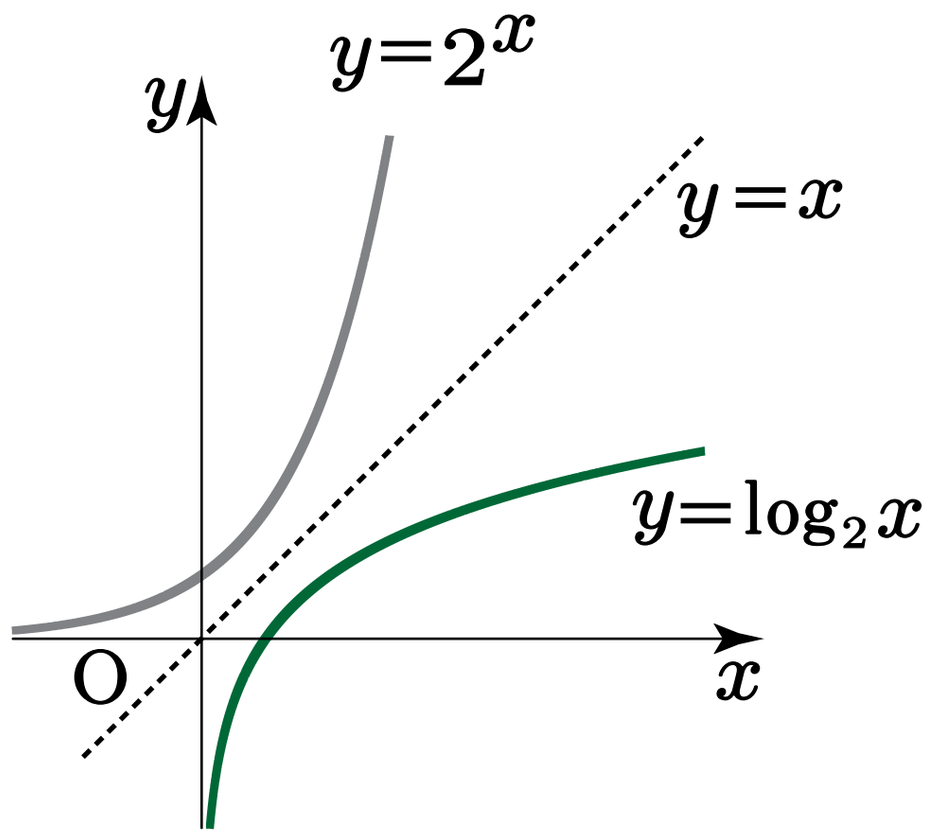
$y=f(x)$ とおき，x について解くと，

x と y を交換して，

$y=$

したがって，

$f^{-1}(x)=$

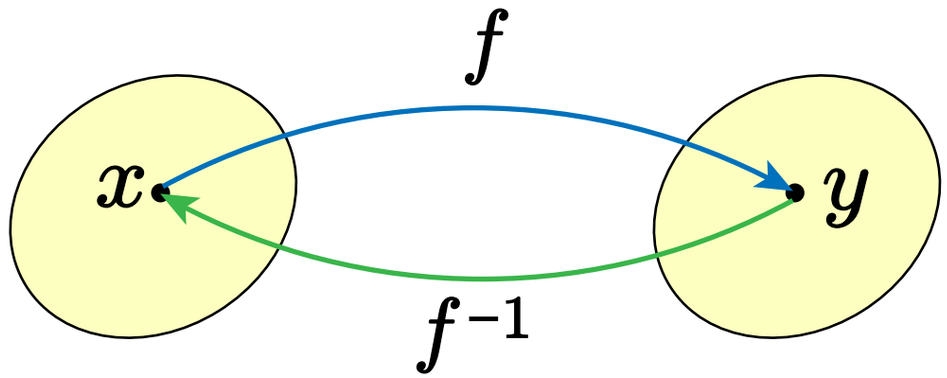


関数とその逆関数の合成

関数 f とその逆関数 f^{-1} について,

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f(f^{-1}(y)) = y$$



言い換えると，次の関係が成り立つ.

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = y$$

注意 変数には，文字 x を使うという慣習に従い,

$$(f \circ f^{-1})(x) = x$$

と表してもよい.

関数とその逆関数の合成の例

例1 関数 $f(x) = x^2 \ (x \geqq 0)$ に対し
$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ であるので

$f^{-1}(f(x)) =$ $(\text{ただし}, x \geqq 0)$

$f(f^{-1}(y)) =$ $(\text{ただし}, y \geqq 0)$

例2 $f(x) = 2^x$ のとき
$f^{-1}(y) = \log_2 y$ であるので

$f^{-1}(f(x)) =$

$f(f^{-1}(y)) =$ $(\text{ただし}, y > 0)$