数学 II

第６章　「微分法と積分法」

22. 定積分の概念

hm2-6-22

(pdf ファイル)

「定積分」

関数 $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ に対し，$F(b)-F(a)$ の値は原始関数 $F(x)$ の選び方に依らない.

そこでこれを関数 $f(x)$ の a から b までの **定積分** (definite integral) といい, 記号 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ で表す.

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を求めることを，関数 $f(x)$ を，**a から b まで積分する** といい，a, b をそれぞれこの定積分の **下端**，**上端** という.

注　定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ において，$a<b$ とは限らない！

定積分の実用的表現

$F(b) - F(a)$ を $\Big[F(x)\Big]_a^b$ とも書く.

定積分の実用的表現

$f(x)$ の原始関数の１つを $F(x)$ とすると

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

例 $f(x) = x$ とすると，その原始関数として

$F(x) =$ がとれるので，

$$\int_1^3 x\,dx =$$

定積分と積分変数

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ が，$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を用いて，$F(b)-F(a)$ と計算されることから，積分記号に登場する積分変数 x は，積分値にはまったく影響しない．いいかえれば，積分変数は別の文字に置き換えることができる．

たとえば，$\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ は，$\displaystyle\int_0^1 t^2\,dt$ や $\displaystyle\int_0^1 y^2\,dy$ と表すこともできる．どれも，　　　という値に等しい．

与えられた関数 $f(x)$ に対し，

定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は，a と b の関数である．

定積分の計算例

(1) $\displaystyle\int_0^3 (x^2 - 2)\,dx =$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^2 (3x^2 - 4x + 1)\,dx =$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^2 (3t - 1)^2\,dt =$