数学 II

第５章　「指数関数と対数関数」

10. 対数の定義

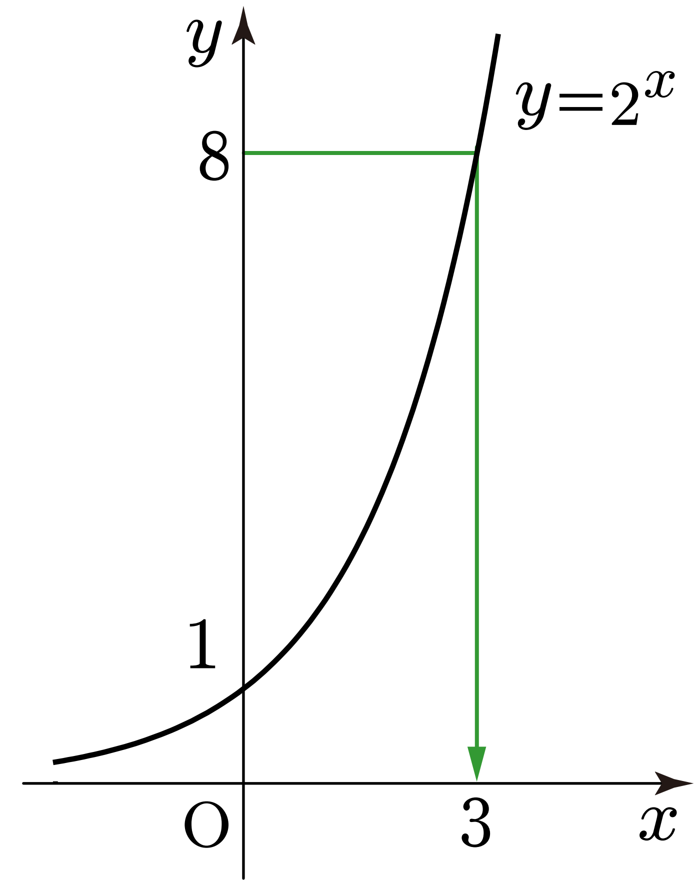
hm2-5-10

(pdf ファイル)

指数関数の逆関数

関数 $y = 2^x$ のグラフからわかるように，y の正の実数値が 1 つ決まると，$2^x = y$ を満たす x の値はただ1つ決まる．

たとえば，$y = 8$ になるのは，$x = 3$ のときだけである．



$x \xrightarrow{\text{指数関数}}$ $y = 2^x$ となる y の値

$2^x = y$ となる x の値 $\longleftarrow$ y

対数と指数

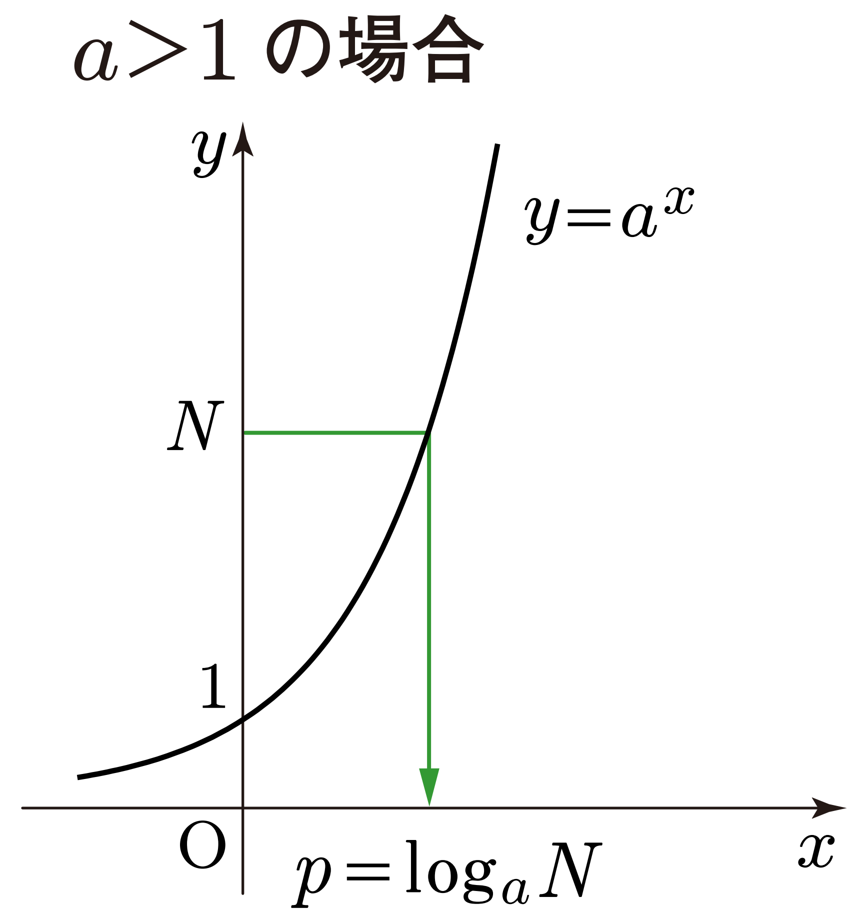
$a>0,\ a \fallingdotseq 1$ とする．
任意の 正の数 N に対して

$$a^p = N$$

を満たす p の実数値はただ
1つ定まる．

この p を

$$\boxed{\log_a N}$$



と表し，a を 底 とする N の 対数 (logarithm) という．因(ちな)みに，N を，この対数の 真数 という．

対数の難しさ

対数 $\log_a x$ は，三角関数 $\sin x$，$\cos x$，$\tan x$ と同様に，関数を表すのに，アルファベット3文字を用いる記号法が，初学者には奇異に映る．

1次関数，2次関数，$\cdots$ のときは，$2x+3$，$-x^2+4x+1$ のように x の簡単な式で表せたが，ここではそうはいかない！

その上，底 a があるので，三角関数以上に複雑．

記号上は2変数関数！　しかし、変数 a は ふつうは “ 止めて ” 考えている．

対数の定義

$a > 0,\ a \neq 1,\ N > 0$ のとき,

$$a^p = N \iff p = \log_a N$$

例 (1)　$2^3 = 8$ であるから,

(2)　$2^4 = 16$ であるから,

(3)　$2^0 = 1$ であるから,

(5)　$2^{-4} = \dfrac{1}{16}$ であるから,

※ $\log_a N$ とは, “a を $\log_a N$ 乗 とすると, N となる” 値のことである．したがって,　$a^{\log_a N} = N$

簡単に値のわかる対数

$a > 0,\ a \neq 1$ のとき,

$$a^0 = 1, \qquad a^1 = a$$

であるから,

$$\boxed{\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1}$$

一般に

$$\boxed{\log_a a^p = p}$$

例 (1) $\log_3 27 =$

(2) $\log_3 \dfrac{1}{9} =$

対数法則

対数に関して，次の対数法則が成り立つ.

$a > 0,\ a \neq 1,\ M > 0,\ N > 0$ のとき，

$\boxed{1}$ $$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$\boxed{2}$ $$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$\boxed{3}$ $$\log_a M^r = r \log_a M$$

対数の創始者ネーピア

John Napier
1550-1617