数学 II

第３章　「図形と式」

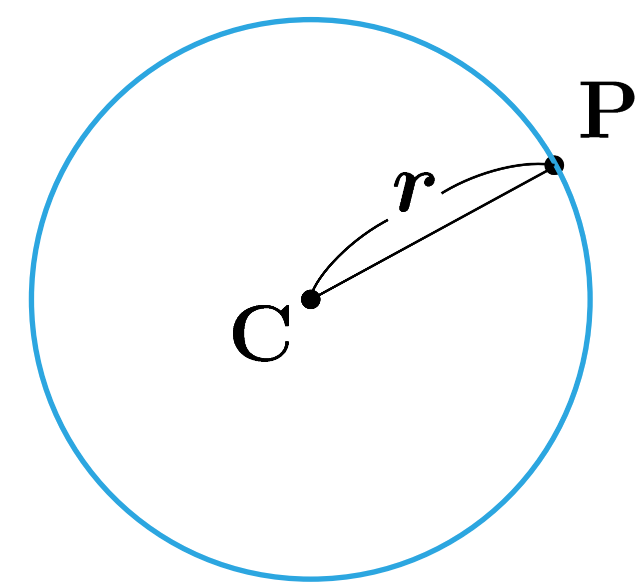
22. 軌跡とは

hm2-3-22

(pdf ファイル)

動点の軌跡

「定点 C からの距離が一定値 r である」という条件を満たしながら点Pが平面上を動いていくとき，このようなPが描く図形は，C を中心とする半径 r の円である.



このように，与えられた条件を満たしながら動く点が描く図形を，その条件を満たす点の **軌跡**(きせき) (locus) という.

初等幾何による軌跡の論証例

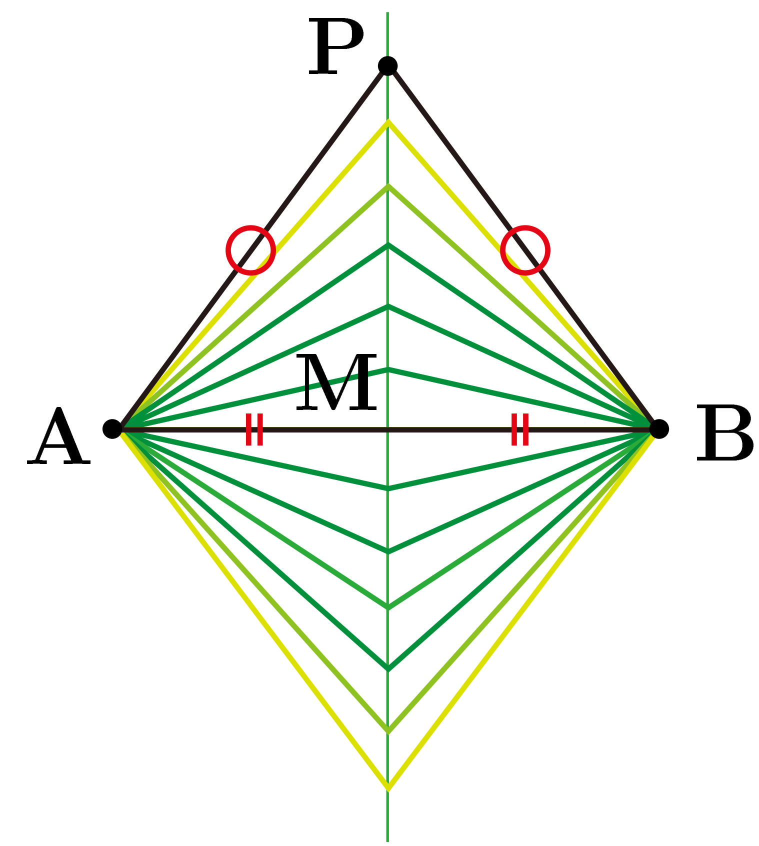
例 2定点 A, B から等しい距離にある点Pの軌跡を考える.

(1)　ABの中点をMとおく.

AP = BPであるとすると,

まず, P ≠ Mのとき, △PAM, △PBM

において, 3辺が等しいので,



よって,　∠PMA = ∠PMB

ゆえに,　PM ⊥ AB

よって,　点 P は, 線分 AB の垂直二等分線上にある.

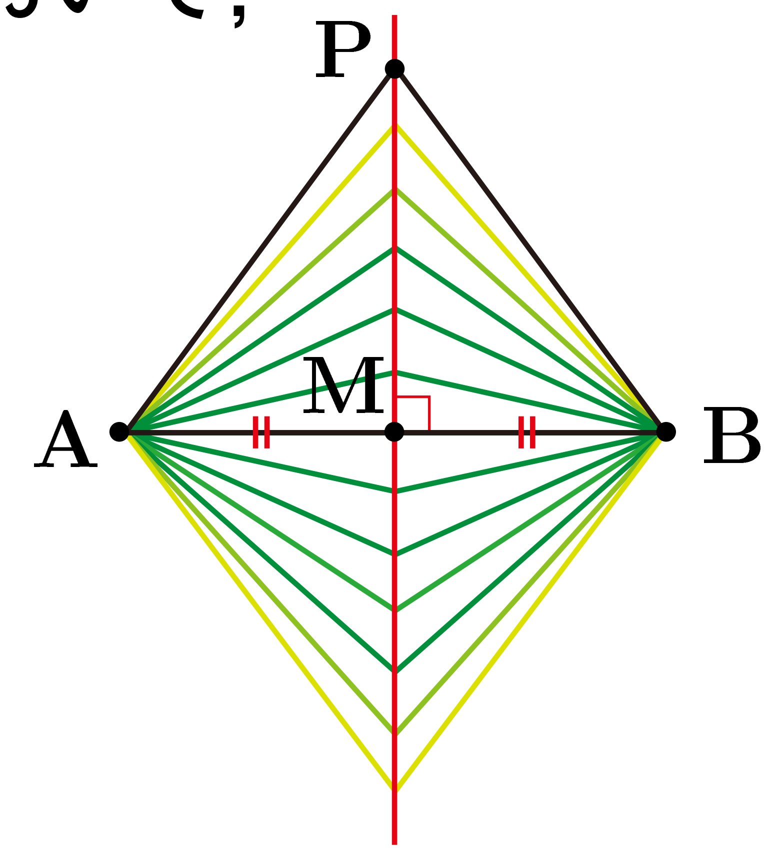
P = M のときもこの上にある.

初等幾何による軌跡の論証例（続）

(2) 逆に，点 P が線分 AB の垂直二等分線上にあるとする．

$\mathrm{P} \neq \mathrm{M}$ のとき $\triangle \mathrm{PAM}, \triangle \mathrm{PBM}$ において，

2 辺とそのはさむ角が等しいので



ゆえに，P は AP＝BP という条件を満たす．

$\mathrm{P} = \mathrm{M}$ のときもこれを満たす．

(1)，(2) より，$\mathrm{PA} = \mathrm{PB}$ を満たす動点 P の軌跡は，線分 AB の垂直二等分線である．

軌跡についての証明の二本柱

与えられた条件を満たす点の軌跡が，図形 $\mathcal{L}$ であることを証明するには，次の 2 つのことを示せばよい．

(1)　与えられた条件を満たすすべての点は，図形 $\mathcal{L}$ の上にある．

(2)　図形 $\mathcal{L}$ 上のすべての点は，与えられた条件を満たす．