数学 II

第１章　「式と証明」

11. 相加相乗その他絶対不等式とその応用②

---

hm2-1-11

(pdf ファイル)

【発展】絶対不等式の最大最小問題への応用（1）

$x > 0$ の範囲を変化する変数 x の関数　$y = x + \dfrac{1}{x}$

のとる最小値を求めよ.

【解】相加平均と相乗平均についての不等式から，不等式

$$y = x + \frac{1}{x} \geqq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$$

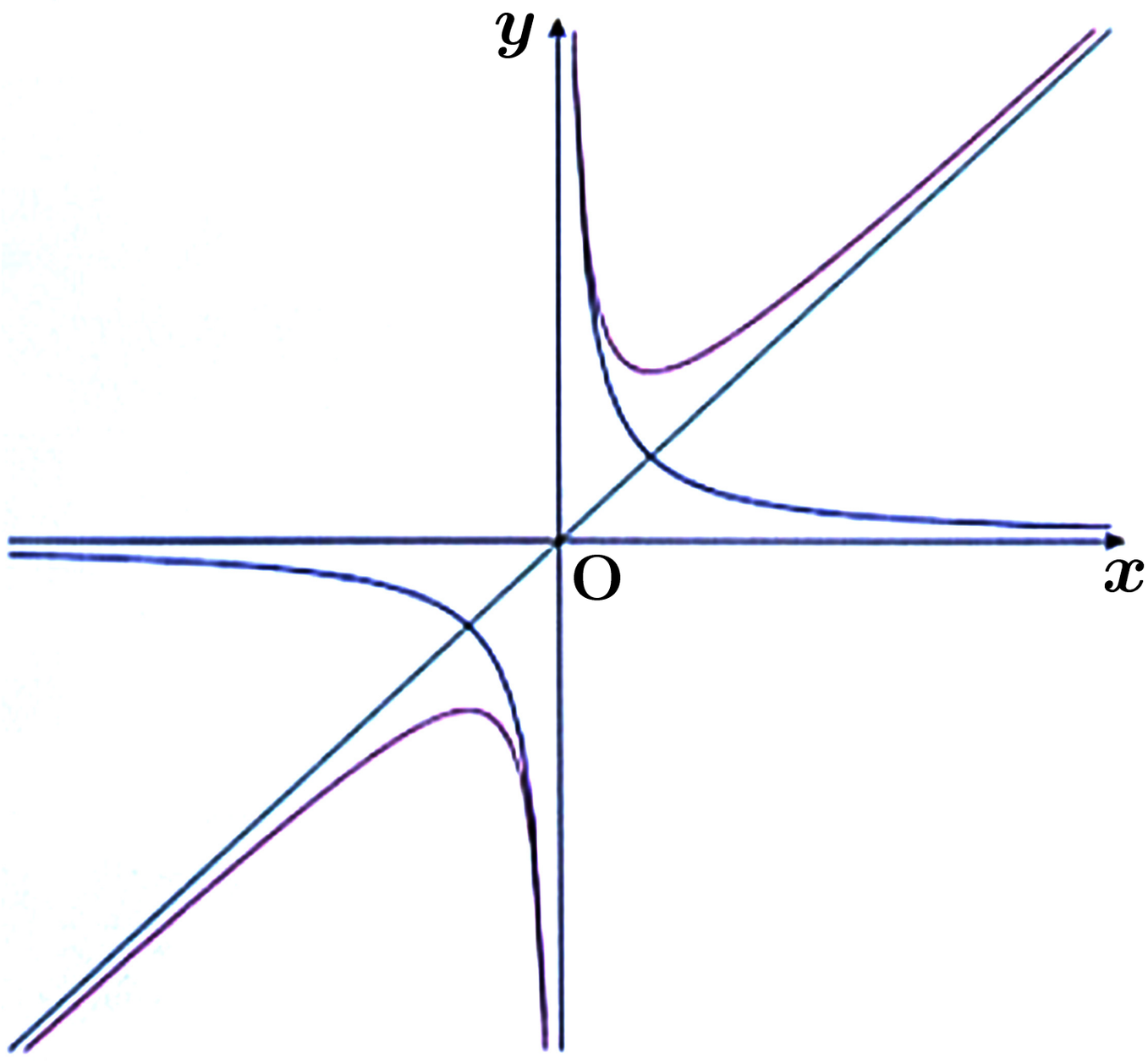
すなわち

$$y \geqq 2$$

が成り立つ．ここで,

$$x = 1$$

のとる等号が成立するので y の最小値は 2 である.

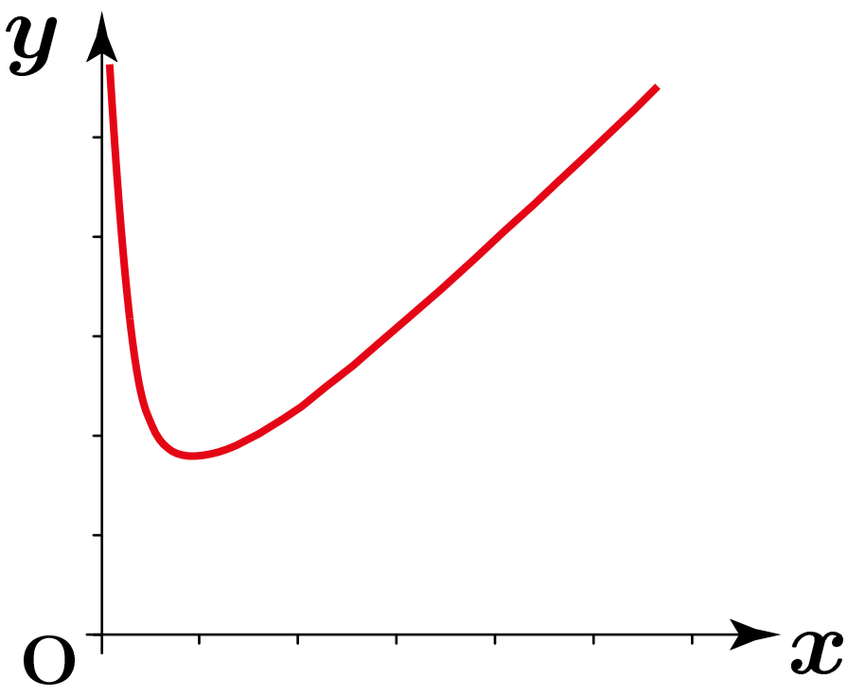

y
O
x

【発展】図形的な理解

関数

$$y = x + \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

のグラフは次のようになっている.



グラフが描ければ，最大値，最小値は直観的に把握できる.

【発展】絶対不等式の最大最小問題への応用（2）

実数 x, y が, $x^2+y^2=1$ を満たして変化するとき, 関数 $z=3x+4y$ のとる最大値と最小値を求めよ.

【解】コーシーの不等式から, 不等式

$$(3x+4y)^2 \leqq (3^2+4^2)(x^2+y^2)$$

が成り立つ. したがって

$$z^2 \leqq 25$$

ここで, 等号は　　かつ　　のとき成立する.

$$\leqq z \leqq$$

ここで, 左右の等号は, それぞれ,　　のとき,　　のとき, 成立する.

よって zの最大値は　　, 最小値は