

数学Ⅰ

第4章 「図形と計量」

7. 三角比の拡張(鈍角の三角比)

hm1-4-7

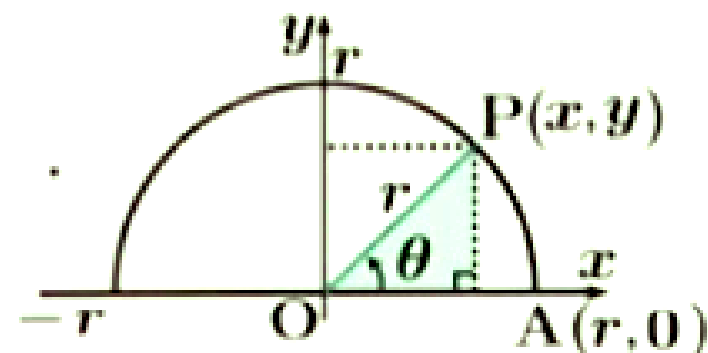
(pdfファイル)

三角比の定義の拡張

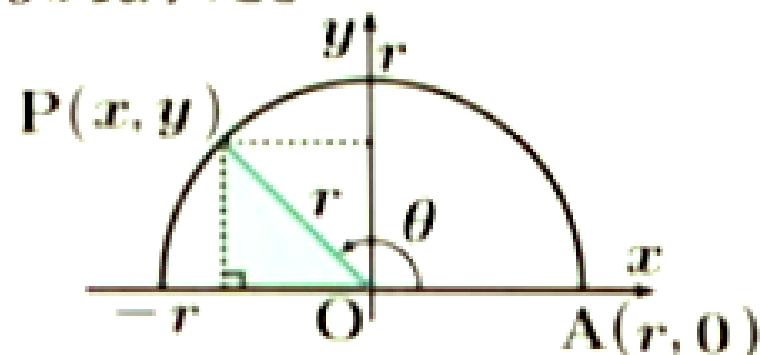
座標平面を用いると、次のようにして、三角比を鋭角以外の範囲に拡張することができる。

- (1) 座標平面上に、原点 O を中心として、右の図のように半径 r の半円を描く

θ が鋭角のとき



θ が鈍角のとき



拡張された三角比についての注意

$$\cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

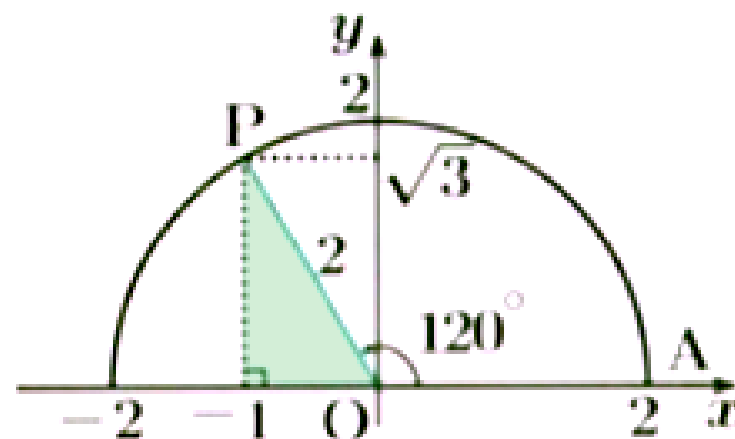
1° θ が鋭角のときは、すでに学んだ直角三角形を使った定義と一致している.

2° $\sin \theta, \cos \theta$ の定義の右辺には r が現れるが、右辺の比の値は r に関係なく θ の大きさだけで定まる.

3° $\tan \theta$ は、その定義の右辺の分母に x があるので、 $x = 0$ となる $\theta = 90^\circ$ のときは、 $\tan \theta$ は定義できない.

鈍角の三角比の値

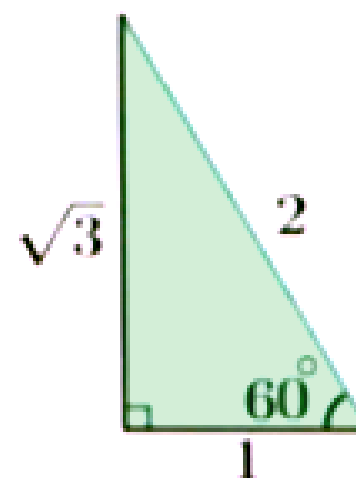
たとえば、 $\theta = 120^\circ$ のとき、
 右の図のように半径 2 の
 半円周上に $\angle AOP = 120^\circ$ と
 なる点 P をとると、 $P(-1, \sqrt{3})$
 である。
 したがって、次のことがわかる。



$$\sin 120^\circ =$$

$$\cos 120^\circ =$$

$$\tan 120^\circ =$$



0°, 90°, 180° の三角比

(1) $\theta = 0^\circ$ のとき,

$$\sin 0^\circ = \quad \cos 0^\circ = \quad \tan 0^\circ =$$

(2) $\theta = 90^\circ$ のとき,

$$\sin 90^\circ = \quad \cos 90^\circ = \quad \tan 90^\circ =$$

(3) $\theta = 180^\circ$ のとき,

$$\sin 180^\circ = \quad \cos 180^\circ = \quad \tan 180^\circ =$$

三角比の符号

三角比の定義において、 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の符号は、 x , y の符号で定まる.

θ が鋭角のときは、 x y であるから、

$\cos \theta$ $\sin \theta$ $\tan \theta$

θ が鈍角のときは、 x y であるから、

$\cos \theta$ $\sin \theta$ $\tan \theta$

単位円周上の点と三角比

原点 O を中心とする半径 1 の円を **単位円** という

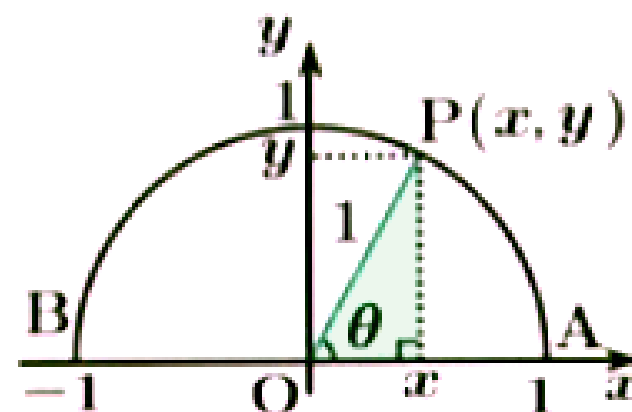
$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるとき、単位円周上に点 $A(1, 0)$ と $\angle AOP = \theta$ となる点 $P(x, y)$ をとると、三角比の定義から

$$\cos \theta = x, \quad \sin \theta = y, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

となる.

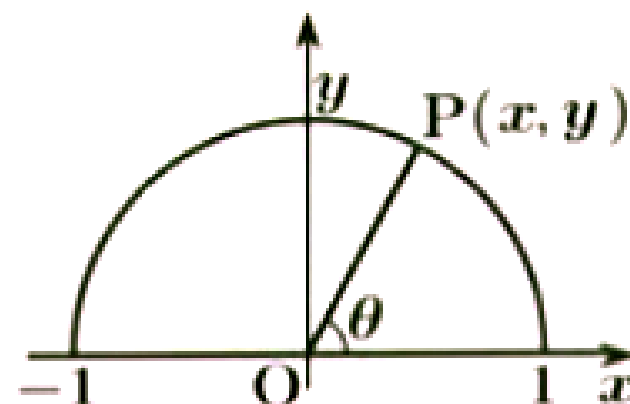
したがって、

単位円周上の点 P の座標は $(\cos \theta, \sin \theta)$ である.



三角比の値の範囲

θ が 0° から 180° まで変化すると、
点 $P(x, y)$ は単位円の半周上を
 $A(1, 0)$ から $B(-1, 0)$ まで移動する。
よって、 x, y はそれぞれ



$$-1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

の範囲を変化する。

したがって、 $\cos \theta, \sin \theta$ のとりうる値の範囲は、

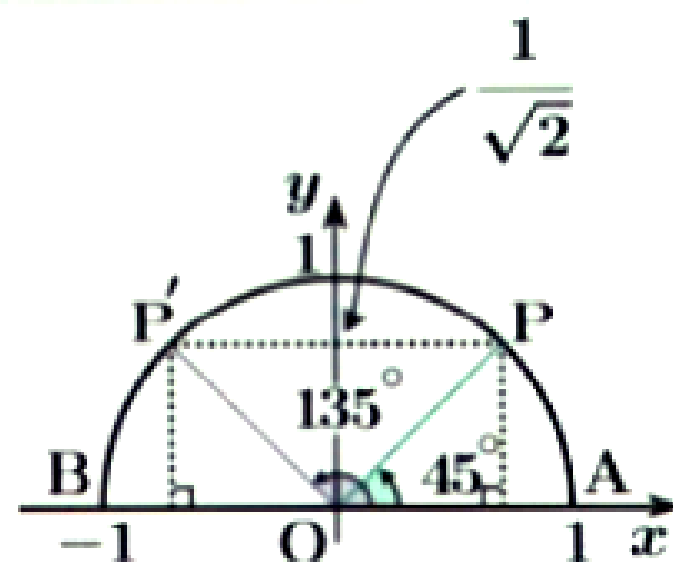
$$-1 \leq \cos \theta \leq 1, \quad 0 \leq \sin \theta \leq 1$$

である。

例題

等式 $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ の値を求めよ。
ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

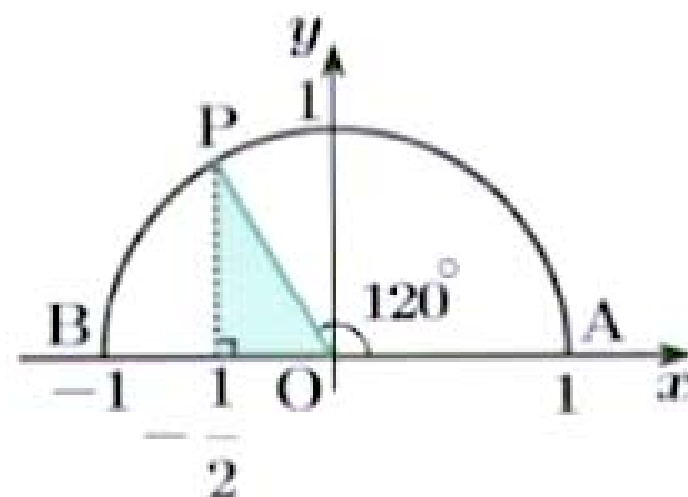
【解】 単位円周上で、 y 座標が $\frac{1}{\sqrt{2}}$ となる点は、右の図の P と P' で、これらは y 軸に関して対称である。



例題

等式 $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ を満たす θ の値を求めよ.
ただし, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする.

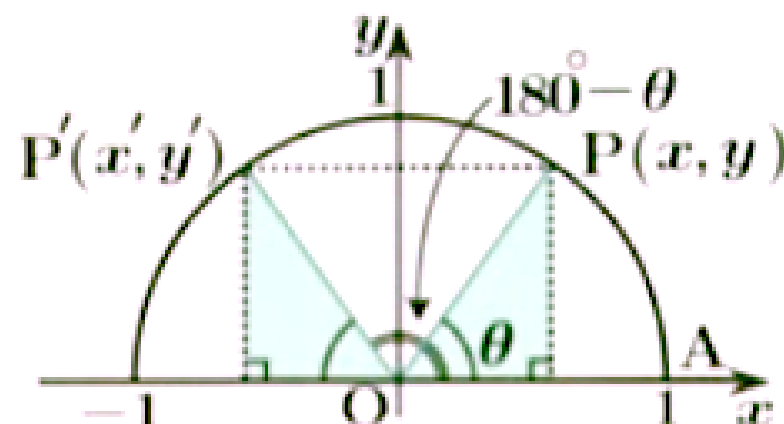
【解】 単位円周上で, x 座標が $-\frac{1}{2}$ となる点は, 右の図の P である.



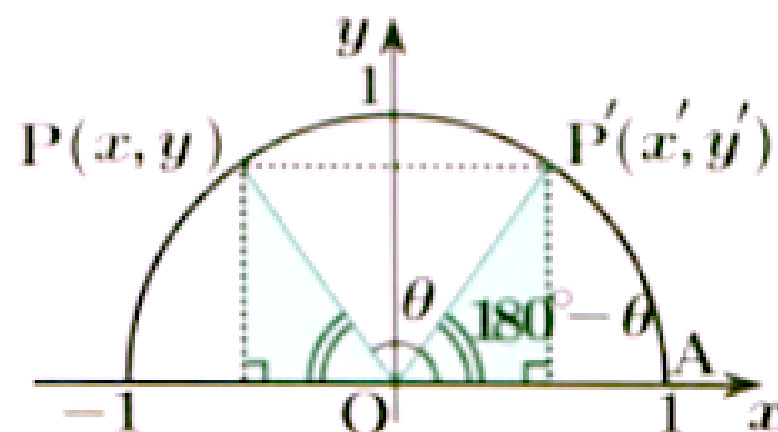
補角 $(180^\circ - \theta)$ の三角比

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ である θ に対し、
 右の図のように、単位円周上に
 $\angle AOP = \theta$, $\angle AOP' = 180^\circ - \theta$
 となる2点 $P(x, y)$, $P'(x', y')$ を
 とると、 P と P' は y 軸に関して対称、
 すなわち、 $x = -x'$, $y = y'$ である。

θ が鋭角



θ が鈍角



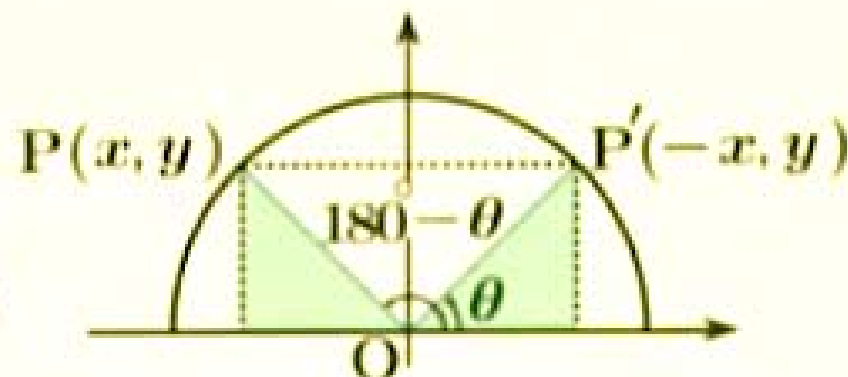
補角公式の意義

$180^\circ - \theta$ の三角比

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$$



➡ 鈍角の三角比 は 鋭角の三角比 で表すことができる.

➡ 三角比の表は $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ の範囲だけでよい.