数学Ⅰ

第４章　「図形と計量」

5. 図形の計量

hm1-4-5

(pdfファイル)

EDUPA

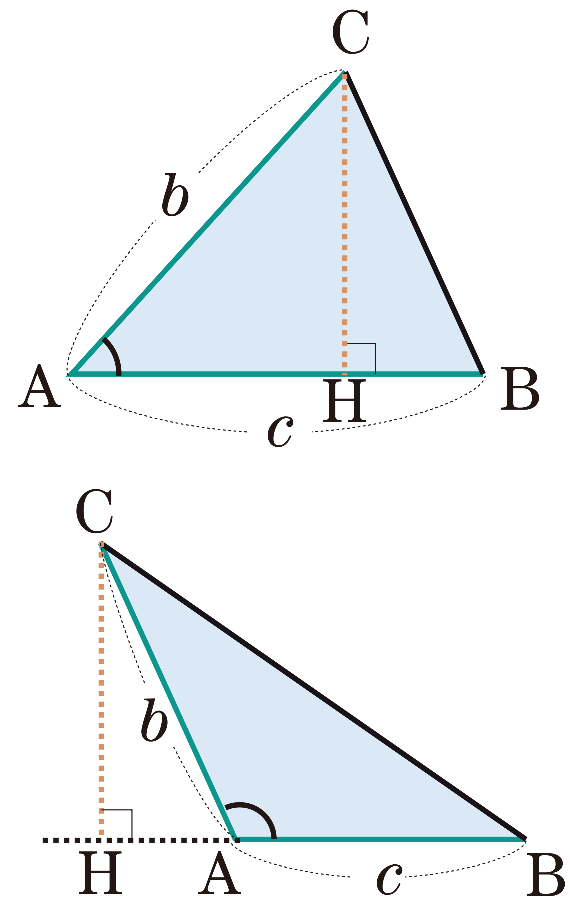
三角形の面積の公式（2辺夾角型）

頂点 C から対辺 AB またはその延長に下ろした垂線を CH とすると

$$\mathrm{CH} = b\sin A$$

であるので，△ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CH} = \frac{1}{2}\cdot c\cdot b\sin A$$



$$\therefore\ \boxed{S = \frac{1}{2}bc\sin A}$$

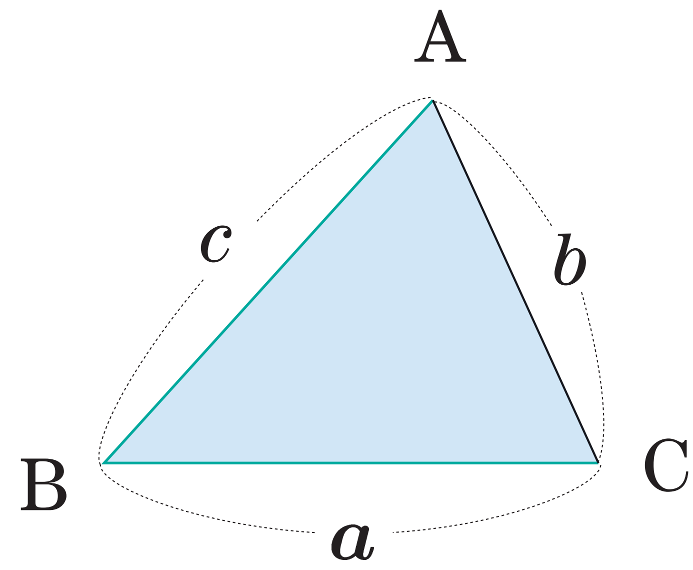
例 $b=4, c=5, A=45^\circ$ のとき，△ABC の面積 S は

$S=$

三角形の面積の公式の応用

$S=\dfrac{1}{2}bc\ \sin A$ と同様にして

$$S=\frac{1}{2}ca\ \sin B=\frac{1}{2}ab\ \sin C$$



これらから，

$$\frac{1}{2}bc\ \sin A=\frac{1}{2}ca\ \sin B=\frac{1}{2}ab\ \sin C$$

$$\therefore\ \frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}\left(\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}\right)$$

また，

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$ を用いて

$$\boxed{S=\frac{abc}{4R}}$$

例題

$\triangle$ABC において，$a=11$，$b=10$，$c=7$ のとき，$\cos A$，$\sin A$，面積 S を求めよ．

【解】余弦定理により，

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} =$$

$\sin A > 0$ であるから，$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ より，

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} =$$

したがって，$S = \dfrac{1}{2} bc \sin A =$

注意 この解法は，a, b, c の具体的な値を必要としていない！

➡ 一般化可能！

例題

円に内接する四角形 ABCD において,

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BC} = 7,\quad \mathrm{CD} = 5,\quad \mathrm{DA} = 3$$

であるとき，$\cos B$ の値と対角線 AC の長さを求めよ.

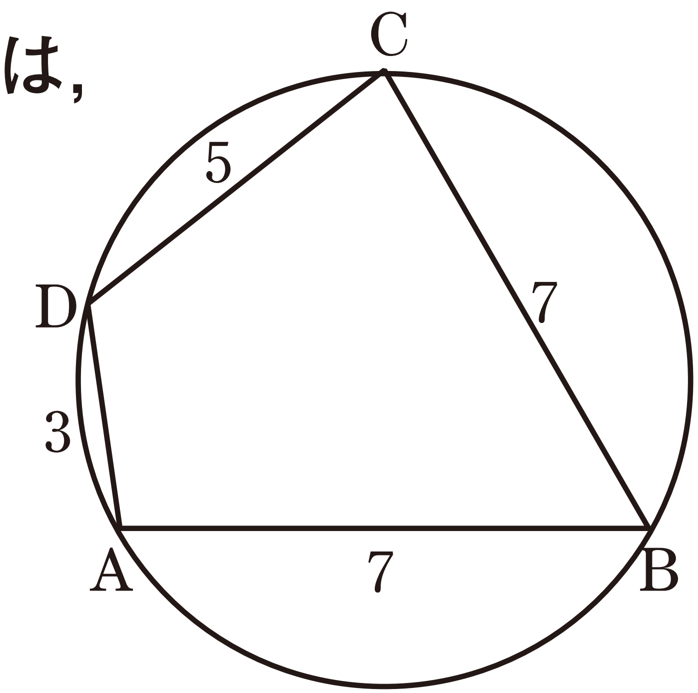
四角形 ABCD について与えられた条件は,

(1) 4辺の長さ

(2) ある円に内接すること

の2つである.

(1) だけでは，四角形は決まらない！



【解】 $\triangle ABC$ において，余弦定理より

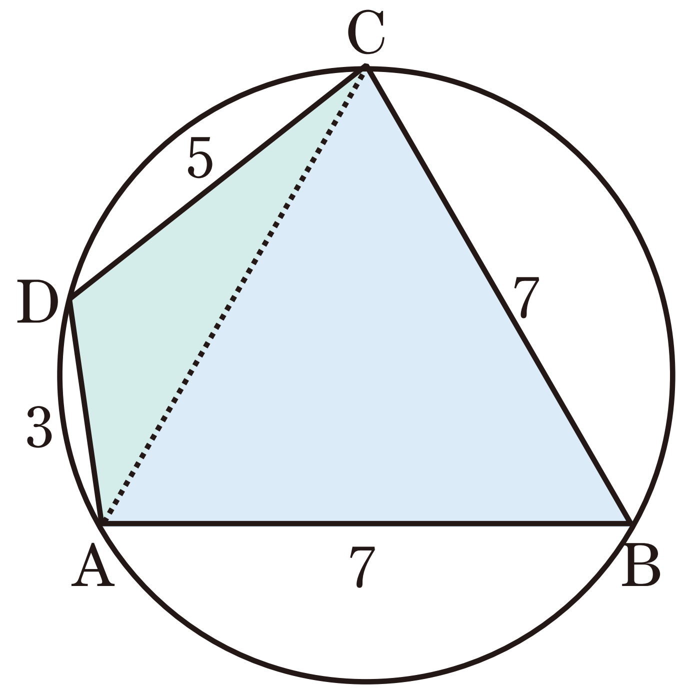
$$AC^2 = \qquad \cdots ①$$

四角形 ABCD が円に内接するから，

$$B + D = 180^\circ$$

よって，$\triangle ADC$ において，余弦定理により

$$AC^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cos D$$
$$= 34 - 30\cos(180^\circ - B) \qquad \cdots ②$$



①,②を，AC^2 と $\cos B$ についての連立方程式と見て解くと

$$\begin{cases} \cos B = \\ AC^2 = \end{cases}$$

ゆえに，$AC =$

例題

円に内接する四角形 ABCD において，4辺の長さが

$$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=7,\quad \mathrm{CD}=5,\quad \mathrm{DA}=3$$

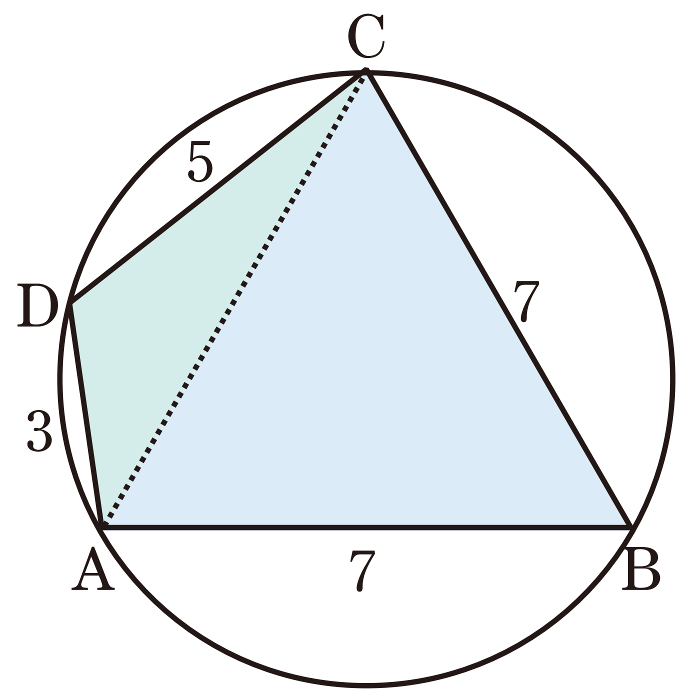
であるとき，四角形 ABCD の面積 S を求めよ.

【解】　四角形の面積 S を $S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ADC}$ と考えると $\cos B=\dfrac{1}{2}$ より，

$\sin B=\qquad\qquad=\sin D$

であるから，

$S=$



教訓　AB，BC，CD，DA の長さは計算に使われているだけ

$\Longrightarrow$ 4辺の長さが与えられた円に内接する四角形の面積はいつも計算できる！

例題

直方体 $\mathrm{ABCD-EFGH}$ において，$\mathrm{AB}=\sqrt{6}$，$\mathrm{AD}=\sqrt{3}$，$\mathrm{AE}=1$ であるとき，$\triangle\mathrm{BDE}$ の面積 S を求めよ．

【解】　$\mathrm{DE}=$

また，$\mathrm{DB}=$

同様に $\mathrm{BE}=$

よって，

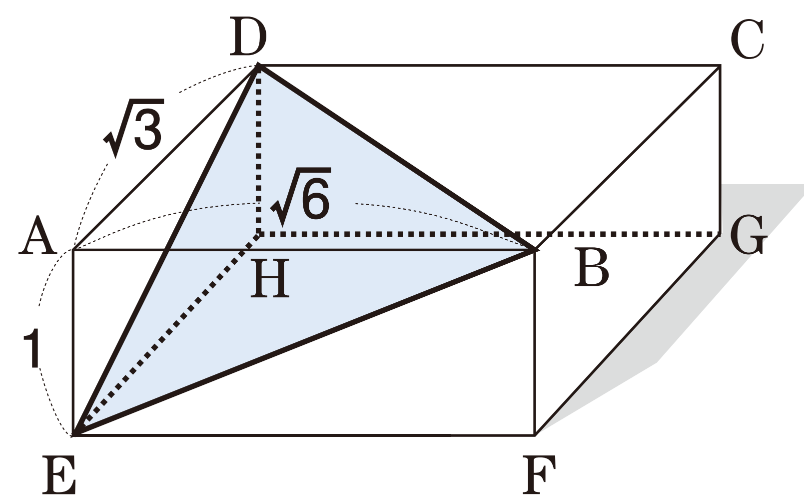
$\cos\angle\mathrm{BDE}=$

これより，

$\sin\angle\mathrm{BDE}=$

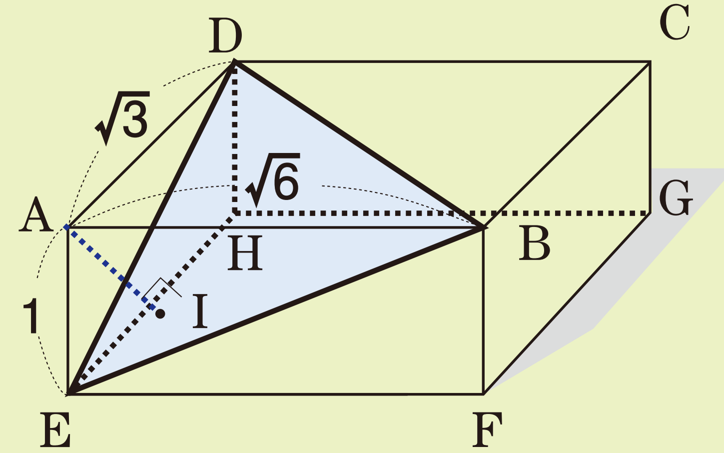
したがって，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{DB}\cdot\mathrm{DE}\cdot\sin\theta=$$



例題

直方体 ABCD − EFGH において，$AB = \sqrt{6}$，$AD = \sqrt{3}$，$AE = 1$ であるとき，A から $\triangle$BDE に下ろした垂線 AI の長さを求めよ.



【解】 四面体 ABDE の体積を V とすると

$$V = \frac{1}{3} \cdot \triangle\mathrm{ABD} \cdot \mathrm{AE}$$

他方，$\triangle$BDEの面積を S とおくと，

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot \mathrm{AI} =$$

したがって， $\mathrm{AI} =$

例題

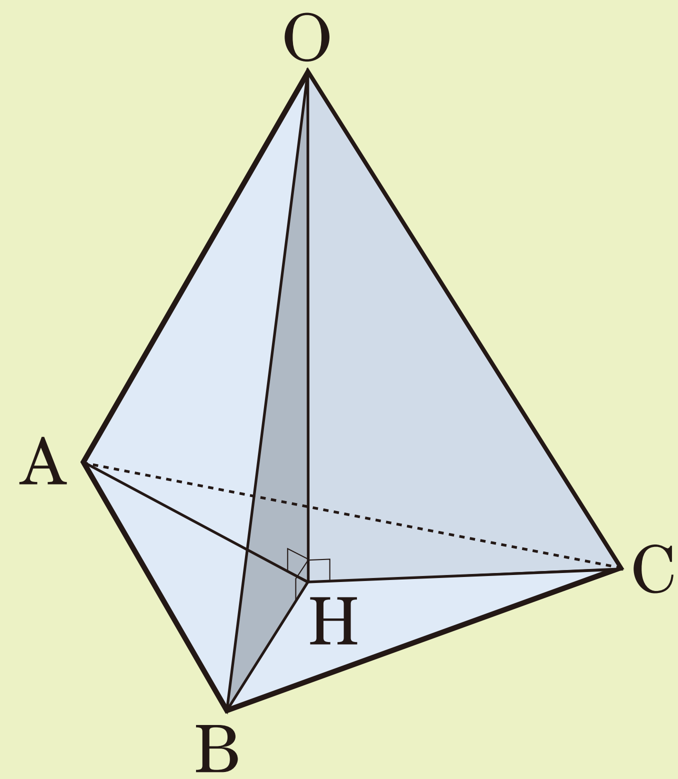
四面体 OABC において，

$OA = OB = OC = 5\sqrt{3}$

$AB = BC = CA = 6$

であるとき，頂点 O から底面 ABC に下ろした垂線を OH とする．

H は △ABC の外接円の中心であることを示し，OH の長さを求めよ．



【解】　3つの直角三角形 OAH, OBH, OCH において,

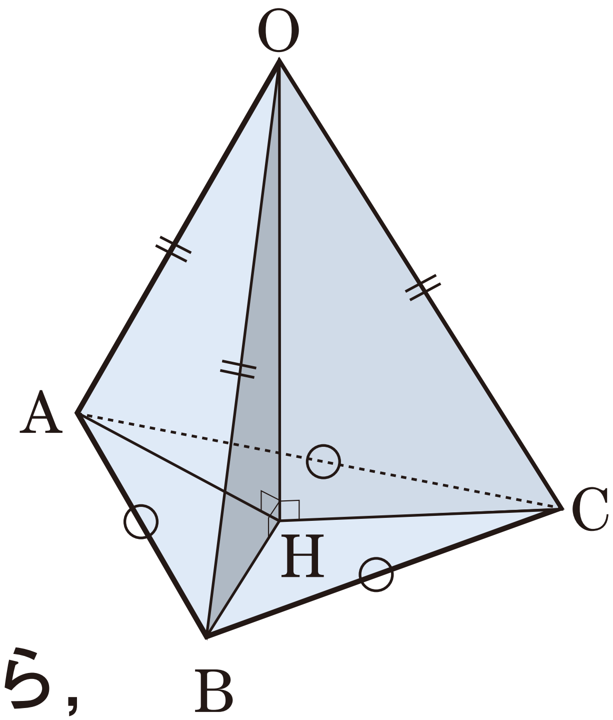
　　OA = OB = OC, OH は共通

であるから, これらは合同である.

よって,　AH = BH = CH

　したがって, H は △ABC の

外接円の中心である.



AH は △ABC の外接円の半径であるから,

　2・AH =　　　　　　ゆえに, AH =

　∴ OH =

注意　△ABC は, ここではたまたま正三角形であるので,

△ABCの外心であるH は, △ABC の重心でもある.

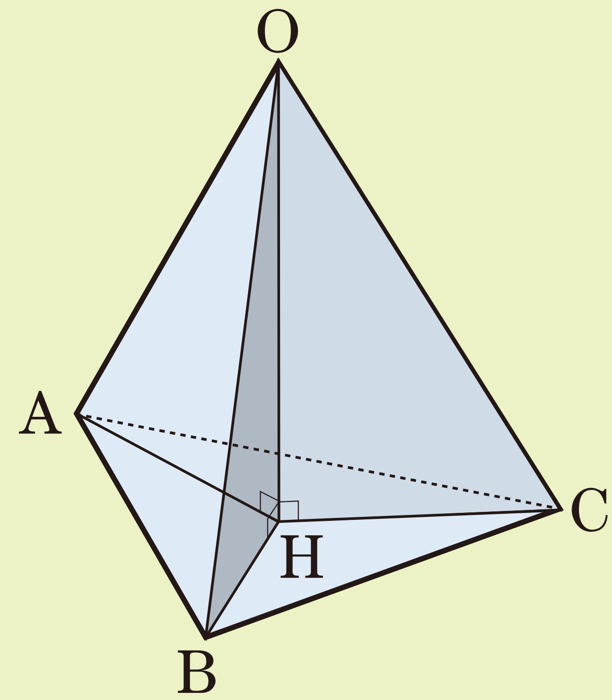
例題

四面体 OABC において,

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=5\sqrt{3}$

$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=6$

であるとき, 四面体 OABC の体積 V を求めよ.



【解】 $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot \sin 60^\circ =$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot \mathrm{OH}=$$

I-12703