

第4章 「図形と計量」

3. 正弦定理

hm1-4-3

(pdfファイル)

垂直二等分線の重要性質

平面上に異なる2点 A, B があるとき,

(1) 点 P が線分 AB の垂直二等分線上にある

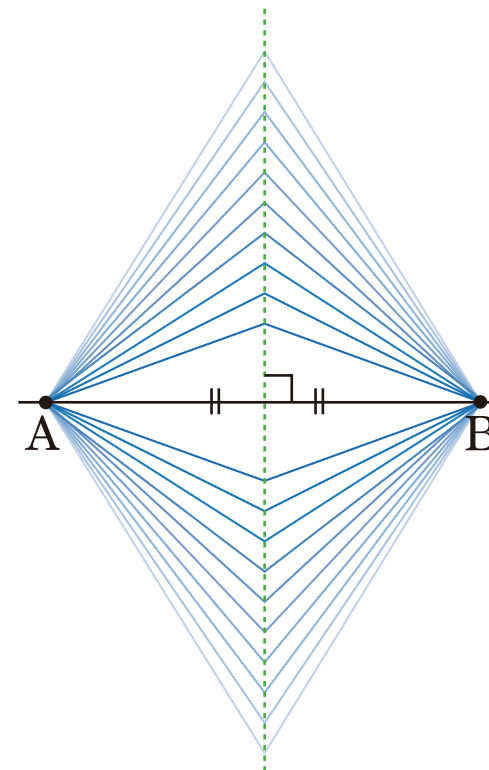
$\implies$ 点 P は2点 A, B から等しい距離にある

(2) 点 P が2点 A, B から等しい距離にある

$\implies$ 点 P は線分 AB の垂直二等分線上にある

P が線分 AB の垂直二等分線
上にある

$$\iff PA=PB$$



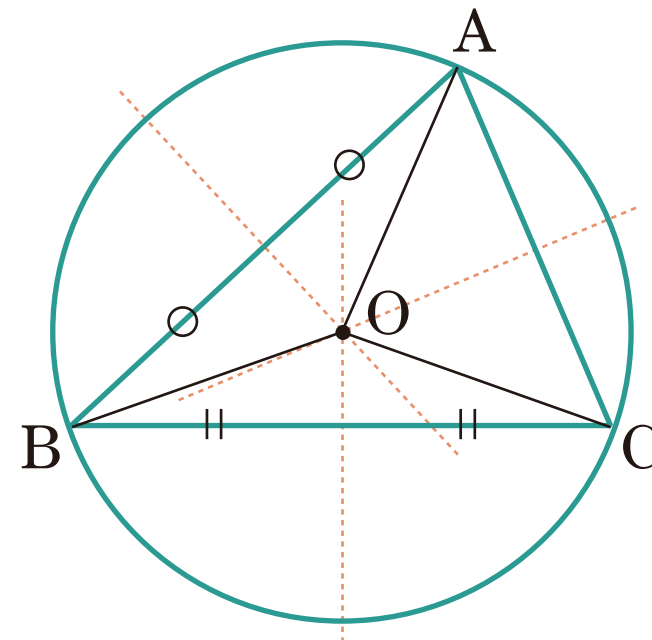
三角形の外接円

△ABC において，辺 AB，辺 BC
の垂直二等分線の交点を O とすると，

$$OA = OB \text{ かつ } OB = OC$$

$$\therefore OA = OB = OC$$

したがって，点 O を中心として3点
A, B, C を通る円が描ける．



△ABC の 外接円

参考

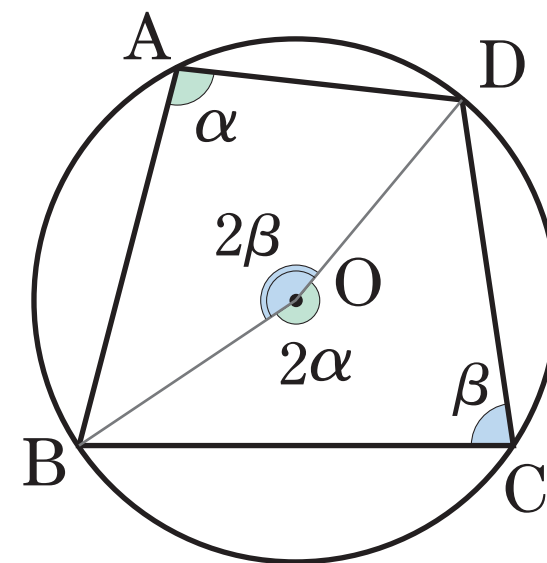
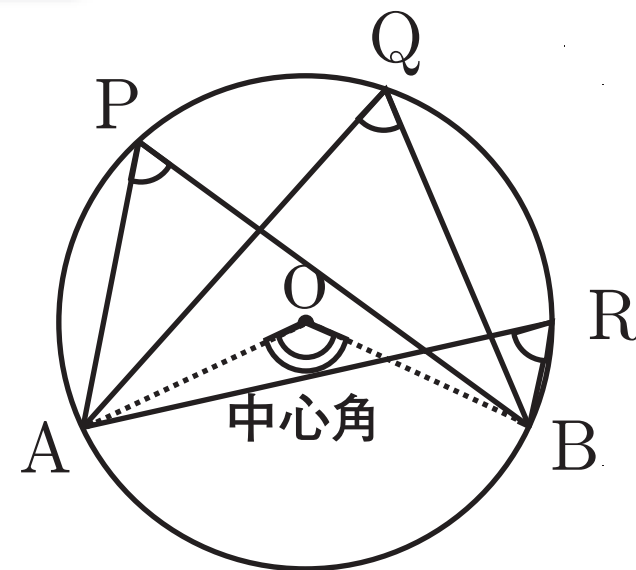
三角形の外心：三角形の外接円の中心

円に関する基本定理

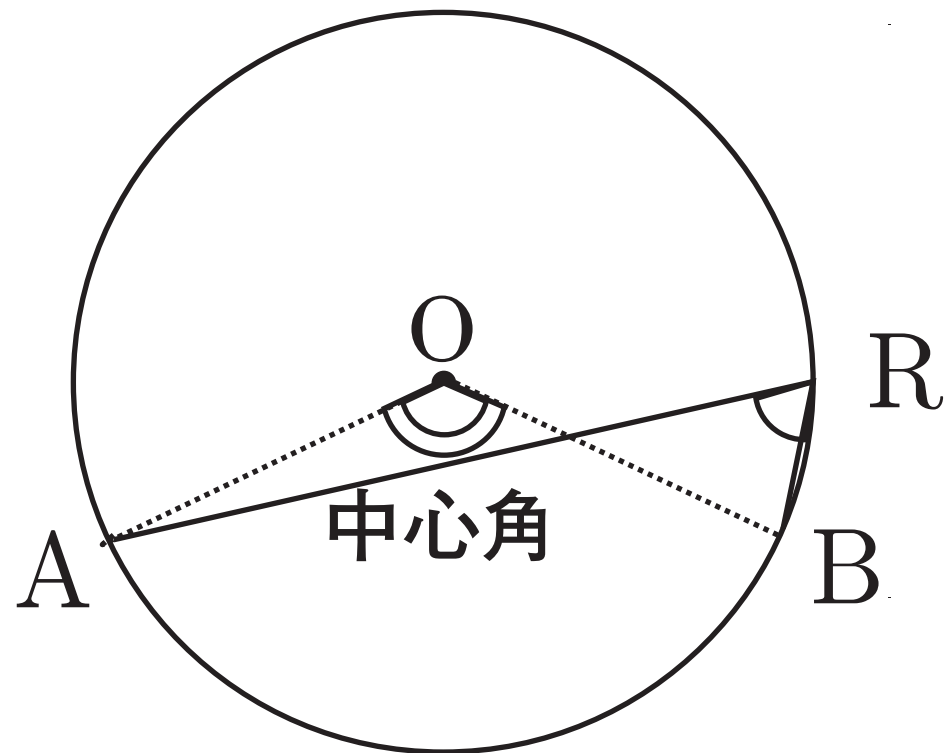
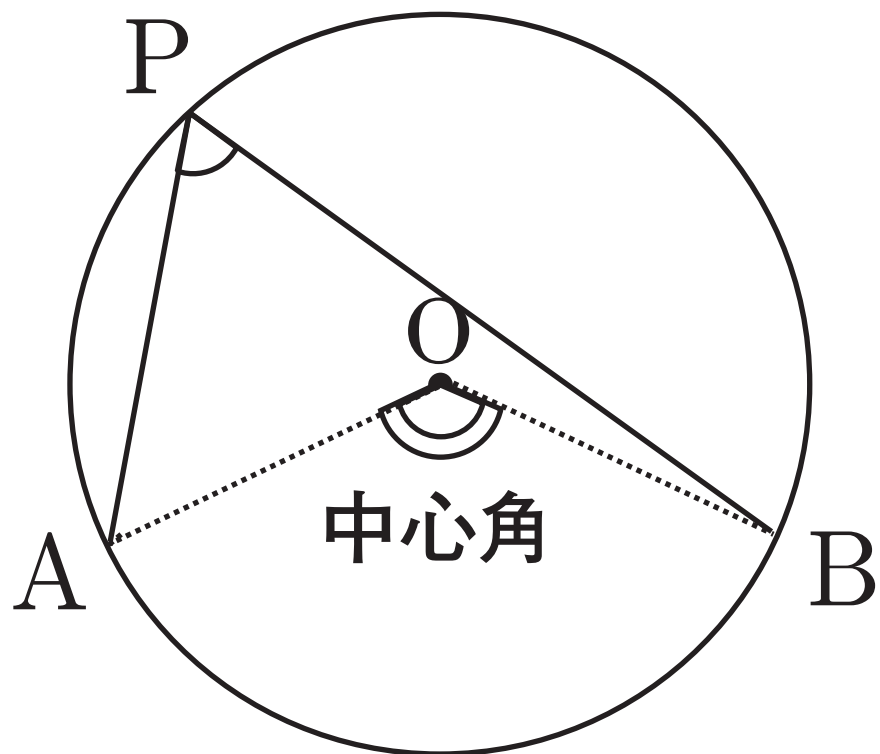
【定理】 円において，与えられた弧の上の円周角はつねに中心角の $1/2$ である．

【系】 与えられた弧の上の円周角は一定である．

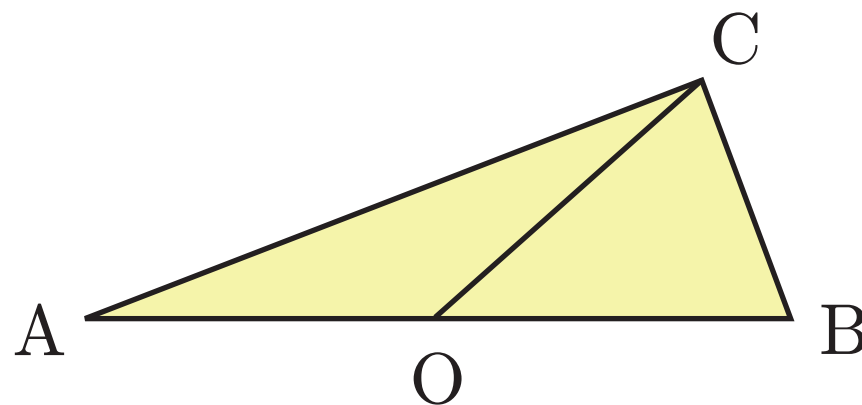
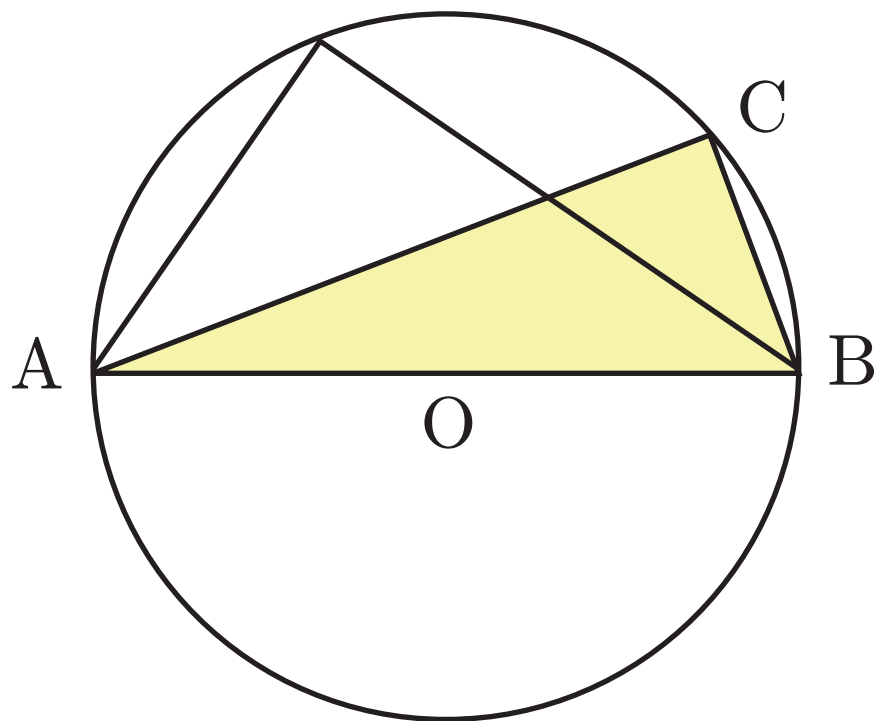
【系】 円に内接する四角形において，向かい合う内角の和は 180° である．



円に関する基本定理の証明



直径上の円周角



正弦定理 (直角の場合)

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とする.

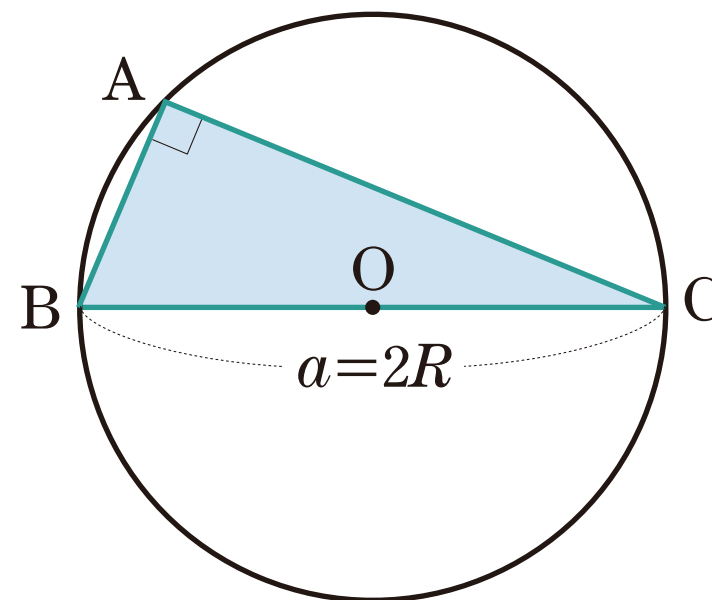
$\triangle ABC$ で $\angle A$ が直角の場合

辺 BC が円の直径であるから,

$$a = 2R$$

また, $\angle A = 90^\circ$ より $\sin A = 1$

$$\therefore a = 2R \sin A$$



正弦定理 (鋭角の場合)

$\triangle ABC$ で $\angle A$ が鋭角の場合

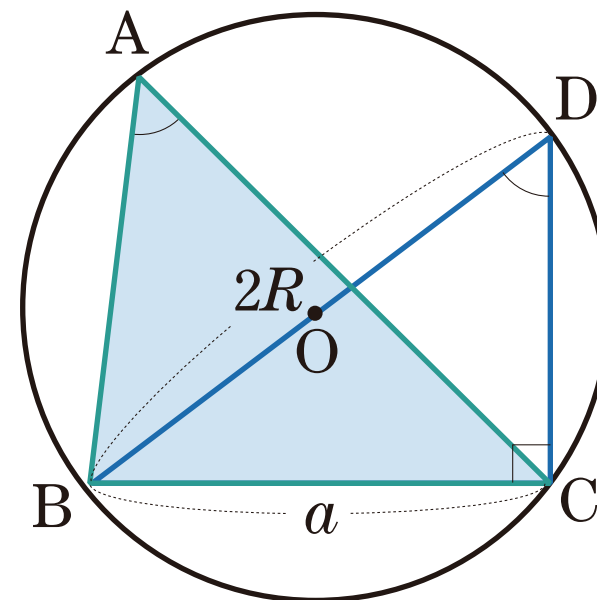
補助線として点 B を通る直径 BD をひく.

$$\left\{ \begin{array}{l} \angle BCD = 90^\circ \\ \angle A = \angle D \\ BD = 2R \end{array} \right.$$

であるから,

$$BC = BD \sin D$$

$$\therefore a = 2R \sin A$$



正弦定理 (鈍角の場合)

$\triangle ABC$ で $\angle A$ が鈍角の場合

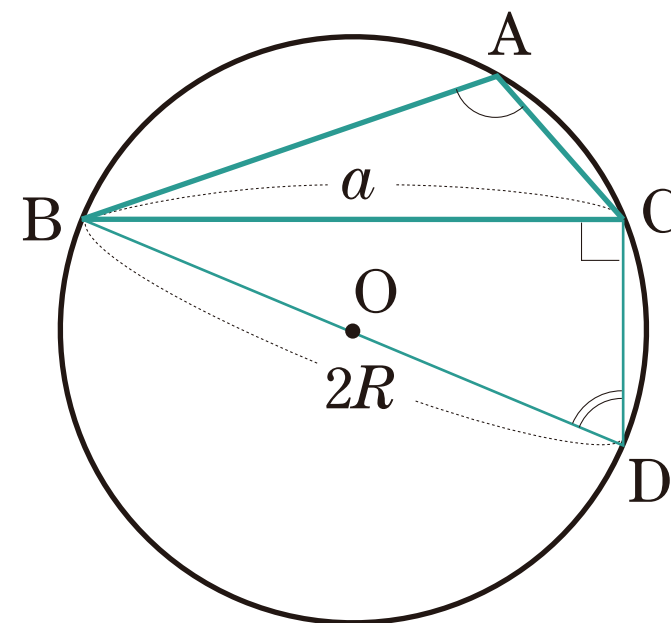
点 B を通る直径 BD を補助線としてひく.

$$\left\{ \begin{array}{l} \angle BCD = 90^\circ \\ D = 180^\circ - A \\ BD = 2R \end{array} \right.$$

であるから,

$$\begin{aligned} BC &= BD \sin D \\ &= 2R \sin(180^\circ - A) \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2R \sin A$$



正弦定理

△ABCにおいて、∠A が直角，鋭角，鈍角いずれの場合も，

$$a = 2R \sin A$$

が成り立つ．

同様に，

$$b = 2R \sin B \quad c = 2R \sin C$$

が成り立つ．

△ABC において，その外接円の半径を R とすると

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad \text{正弦定理}$$

$$\rightarrow a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

正弦定理の応用例 (1)

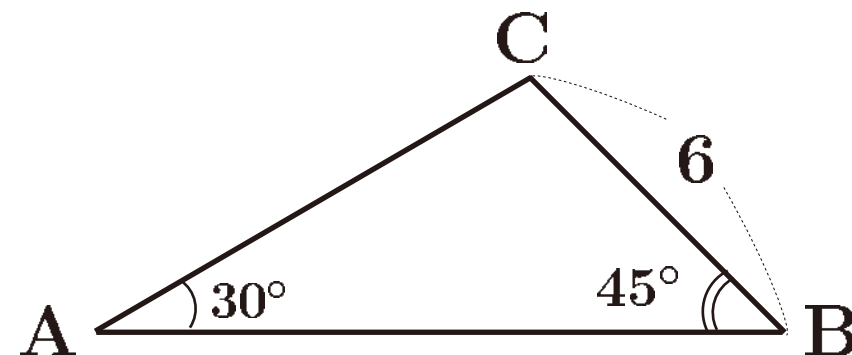
例題

$\triangle ABC$ において, $a = 6$, $A = 30^\circ$, $B = 45^\circ$ のとき,
 b を求めよ.

【解】 正弦定理により

$$6 : b = \sin 30^\circ : \sin 45^\circ \quad \dots\dots (*)$$

ゆえに, $b =$



注 (*) は, $\frac{6}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}$ と表しても同じ!

正弦定理の応用例 (2)

例題

$\triangle ABC$ において, $a = 6$, $A = 30^\circ$ のとき, その外接円の半径 R を求めよ.

【解】 正弦定理により

$$2R = \frac{6}{\sin 30^\circ}$$

ゆえに,

$R =$

