数学 II

第５章　「指数関数と対数関数」

5. 有理数・実数指数の定義

hm2-5-5

（pdf ファイル）

分数を指数にもつ累乗の定義

定義

$a > 0$ で，p，q が整数，　$p > 0$ のとき，

$$a^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{a^q} \ \left(= (\sqrt[p]{a})^q\ \right) \quad とくに，\quad a^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{a}$$

【定義の背景】

指数法則 $\boxed{2}$　$(a^m)^n = a^{mn}$ が，$m = \dfrac{q}{p}$，$n = p$

のときにも成り立つものとし，$x = a^{\frac{q}{p}}$ と表されるはずの正の数を考えると，

$$x^p = \left(a^{\frac{q}{p}}\right)^p =$$

より，　$x =$

例

(1) $\quad 25^{\frac{1}{2}} =$

(2) $\quad 8^{\frac{2}{3}} =$

(3) $\quad 8^{-\frac{2}{3}} =$

(4) $\quad 16^{\frac{3}{4}} =$

(5) $\quad 32^{\frac{2}{5}} =$

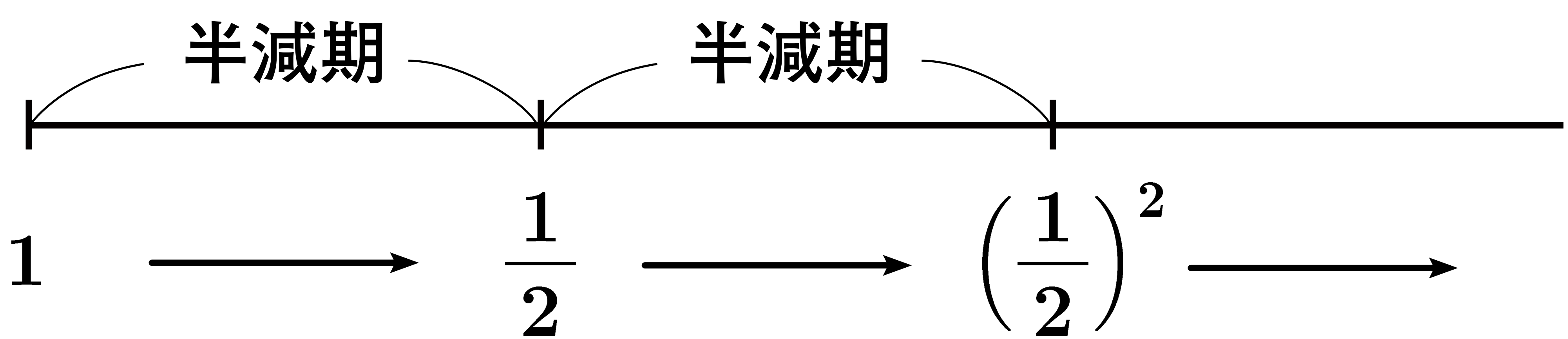
(6) $\quad \left(\dfrac{1}{64}\right)^{\frac{3}{4}} =$

(7) $\quad (128)^{-\frac{2}{5}} =$

「指数の拡張の必要性」について

たとえば，半減期の $\dfrac{1}{2}$ の時間が経過したとき，放射性物質は，どれ位に減っているだろうか.

あるいは，放射性物質の量が $\dfrac{1}{3}$ となるのは，半減期何回分の時間が経過したときだろうか.



指数の列と累乗の列

n	$\cdots$	-2	-1	0	1	2	3	4	$\cdots$
a^n					a	a^2	a^3	a^4	$\cdots$

n	$\cdots$	-2	$\frac{-3}{2}$	-1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\cdots$
a^n		$\frac{1}{a^2}$		$\frac{1}{a}$		1		a		a^2	

n	$\cdots$	-1	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$\cdots$
a^n		$\frac{1}{a}$		$\frac{1}{\sqrt{a}}$		1		$\sqrt{a}$		a	

指数が有理数のときの指数法則

$a > 0$, $b > 0$ で，r, s が有理数のとき，
次の指数法則が成り立つ．

$\boxed{1}$ $$a^r a^s = a^{r+s}$$

$\boxed{2}$ $$(a^r)^s = a^{rs}$$

$\boxed{3}$ $$(ab)^r = a^r b^r$$

有理数を指数にもつ数の計算例

(1) $\quad 2^{\frac{1}{2}} \div 2^{\frac{1}{6}} \times 4^{\frac{1}{3}} =$

(2) $\quad \sqrt[3]{2} \div \sqrt[6]{2} \times \sqrt[6]{32} =$

(3) $\quad \sqrt{12}^{3} \times \sqrt{24} \div 81^{\frac{3}{4}} \times \sqrt[6]{8}^{3}$

$=$

実数を指数にもつ累乗の定義

たとえば，$2^{\pi} = 2^{3.1415926\cdots}$ は，

$$2^{3.1},\ 2^{3.14},\ 2^{3.141},\ 2^{3.1415},\ 2^{3.14159},\ 2^{3.141592},\ \cdots$$

のように π に近づく有理数を指数とする 2 の累乗の列

$$8.57418\cdots,\ 8.815240\cdots,\ 8.821353\cdots,$$
$$8.82441\cdots,\ 8.82496\cdots,\ 8.824973\cdots,\ \cdots$$

の値が，限りなくある一定の値に近づいていくので，この値をもって 2^{π} と定める．

このようにして，任意の実数 x に対して a^x が定義される．指数を実数にまで拡張したときも指数法則が同じように成り立つ．