数学 II

第５章　「指数関数と対数関数」

4. 累乗根の性質と計算

hm2-5-4

（pdf ファイル）

累乗根の性質

一般に，累乗根について次の性質が成り立つ．

$a>0,\ b>0$ で，$m,\ n$ が正の整数のとき，

$\boxed{1}$ $$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

$\boxed{2}$ $$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$\boxed{3}$ $$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$$

$\boxed{4}$ $$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

累乗根の性質 1 の証明

$\boxed{1}\quad \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

証明 $x = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ とおく.

$a > 0,\ b > 0$ より $\sqrt[n]{a} > 0, \sqrt[n]{b} > 0$ であるから,

$$x > 0 \qquad \cdots ①$$

さらに,

$$x^n = (\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n = \qquad \cdots ②$$

①, ② より,

$x = \sqrt[n]{ab}$ すなわち, $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ ∎

$\boxed{2}$ も同様に証明される.

累乗根記号を含む数の計算例

(1) $\sqrt[4]{3}\sqrt[4]{27} =$

(2) $\sqrt[3]{24}\sqrt[3]{54} =$

(3) $\dfrac{\sqrt[3]{182}}{\sqrt[3]{81}} =$

(4) $\sqrt[3]{40} =$

(5) $\sqrt[4]{32} + \sqrt[4]{162} - \sqrt[4]{1250} =$

累乗根の性質 3 4 の証明

$\boxed{3}$ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ $\boxed{4}$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

$\boxed{3}$ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \underbrace{\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{a}\cdots\sqrt[n]{a}}_{m} =$

$\boxed{4}$ $x = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ とおくと，$x > 0$ であって，
しかも

$$x^m = \sqrt[n]{a}$$

$$(x^m)^n =$$

$$x^{mn} = \qquad \therefore\ x = \sqrt[mn]{a} \quad \blacksquare$$

累乗根の性質③④の拡張

$\boxed{3}$ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$　　ただし，$a > 0$

これは，m が 0 以下の整数のときも成り立つ.

i) $m = 0$ のときは，自明である.

ii) $m < 0$ のときは，$m = -\mu$ とおくと，μ は正の整数であって

$$(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n]{a})^{-\mu} = \frac{1}{(\sqrt[n]{a})^\mu} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^\mu}}$$

$$= \sqrt[n]{\frac{1}{a^\mu}} = \sqrt[n]{a^{-\mu}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \blacksquare$$

累乗と大小関係

n が正の整数のとき，2つの正の数 a, b の大小関係はそれらを n 乗しても変わらない．すなわち，

$a>0$, $b>0$ のとき，　$a<b \Longleftrightarrow a^n<b^n$

例　$\sqrt{2}$ と $\sqrt[3]{3}$ の大小は，それぞれを6乗して比較すると，

↑ 累乗根記号のない形にしたい！

$$(\sqrt{2})^6 = \qquad\qquad (\sqrt[3]{3})^6 =$$

であるから，　$(\sqrt{2})^6<(\sqrt[3]{3})^6$　よって，

注　実は，$\sqrt{2}=1.4142135623\cdots$

$\sqrt[3]{3}=1.4422495703\cdots$