数学 II

第５章　「指数関数と対数関数」

2. 整数指数への拡張

hm2-5-2

(pdf ファイル)

EDUPA

いわゆる「指数法則」

m, n が正の整数 であるとき，次の関係が成り立つ.

指数法則

$\boxed{1}$ $$a^m a^n = a^{m+n}$$

$\boxed{2}$ $$(a^m)^n = a^{mn}$$

$\boxed{3}$ $$(ab)^n = a^n b^n$$

例

$$\begin{aligned} a^5 a^3 &= (a \times a \times a \times a \times a) \times (a \times a \times a) \\ &= a^{5+3} \end{aligned}$$

$$(a^5)^3 = a^5 \times a^5 \times a^5 = a^{5\times 3}$$

$$(ab)^3 = ab \times ab \times ab = a^3 b^3$$

0と負の整数の指数に向かって

$a \neq 0$ のとき，指数法則 $\boxed{1}$ $a^m a^n = a^{m+n}$ が，

$n = 0$ でも成り立つものとすると，

$a^m a^0 = a^{m+0}$ ゆえに，

この両辺を a^m で割ると，

$$a^0 = 1$$

さらに，$\boxed{1}$ において，$m = -n$ とおけるものとすると，

$$a^{-n} a^n = a^{(-n)+n}$$

この右辺は すなわち に等しい．ゆえに，

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

0や負の整数を指数にもつ累乗の定義

$a \neq 0$ のとき，0または負の整数 を指数にもつ a の累乗を，次のように定める.

定義

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (\ n\ ：正の整数)$$

例

(1) $3^0 =$

(2) $2^{-3} =$

(3) $(-3)^{-4} =$

(4) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} =$

指数が整数のときの指数法則 $\boxed{1}$

$a \neq 0$ のとき，0 以下も含めて **任意の整数** $m,\ n$ に対しても，指数法則

$$\boxed{1} \quad a^m a^n = a^{m+n}$$

が成り立つ．

たとえば，$m = 5,\ n = -3$ のとき，

$$a^5 a^{-3} = a^5 \cdot \frac{1}{a^3} = a^2 = a^{5-3}$$

また，$m = -5,\ n = -3$ のとき，

$$a^{-5} a^{-3} =$$

割り算の特別扱いの解消

一般に，0 でない数 b に対し，$a \div b$ は $a \times \dfrac{1}{b}$ に等しいので，$a \neq 0$ のとき，任意の整数 m，n に対して，

$$a^m \div a^n = a^m \times \frac{1}{a^n} = a^m \times a^{-n} = a^{m-n}$$

すなわち，

$$\boxed{a^m \div a^n = a^{m-n}}$$

が成り立つ。

例 $a^8 \times a^{-2} \div a^3 =$

指数が整数のときの他の指数法則

$\boxed{1}$ $a^m a^n = a^{m+n}$

と同様，次の指数法則が任意の整数 m, n に対して成り立つ．ただし，$a \neq 0$, $b \neq 0$ とする．

$\boxed{2}$ $(a^m)^n = a^{mn}$ $\boxed{3}$ $(ab)^n = a^n b^n$

例 (1) $(a^{-2})^{-3} =$

(2) $(a^{-1}b)^{-2} =$