数学 II

第５章　「指数関数と対数関数」

18. 常用対数の応用(2)

hm2-5-18

(pdf ファイル)

正の数の整数部分の桁数

　$N > 1$ のとき，N の整数部分が k 桁(けた)の数であるとは，

$$10^{k-1} \leqq N < 10^k$$

となることである．

　これは常用対数を用いて，次のように表される．

$$k - 1 \leqq \log_{10} N < k$$

$N > 1$ の整数部分が k 桁

$\Longleftrightarrow \log_{10} N$ が $k-1$ 以上 k 未満

巨大な数のおよその値

　$N = 2^{100}$ は何桁の整数であるか考えよう.

$\log_{10} 2 = 0.3010$ として，$N = 2^{100}$ の常用対数を計算すると,

$$\log_{10} N = \log_{10} 2^{100} =$$

したがって,　$\leqq \log_{10} N <$

ゆえに,　$\leqq N <$

すなわち，N は　桁の整数である.

注 $2^{100} = 1267650600228229401496703205376$

微小な数のおよその値

$N=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{100}$ は小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか考えよう.

$\log_{10} 2 = 0.3010$ として，N の常用対数をとると,

$$\log_{10} N = \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{100} = \log_{10} 2^{-100}$$

したがって, $\leqq \log_{10} N <$

ゆえに, $\leqq N <$

すなわち，N は小数第　　位に初めて 0 でない数字が現れる.

例題

　ある放射性元素は時間の経過につれて一定の割合で崩壊し，ちょうど 7 日間で量が半分になるという．この元素の量がはじめの $\dfrac{1}{10}$ 以下となるのは何日目か．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

【解】半減期が 7 日なので，x 日たつと，初めの $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{7}}$ になる．元の $\dfrac{1}{10}$ 以下となるのが x 日経過したときであるとすると，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{7}} \leqq \frac{1}{10}$$

という関係が成立すべきである．

不等式 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{x}{7}} \leqq \dfrac{1}{10}$ を満たす最小の整数 x を求めればよい.

そこで両辺の常用対数をとると,

$$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{7}} \leqq \log_{10}\frac{1}{10}$$

よって, $x \geqq \dfrac{7}{\log_{10} 2} \fallingdotseq \dfrac{7}{0.3010} = 23.2\cdots$

したがって, 24 日目