

第 5 章 「指数関数と対数関数」

16. 対数方程式、対数不等式

hm2-5-16

(pdf ファイル)

対数関数の順問題と逆問題

x の値 $x = x_0$ が与えられたとき、これに対応する関数の値 $y = f(x)$ の値を求める問題を、**順問題** とすれば、 y の値 $y = a$ が与えられたとき、関数値がこれに等しくなるような変数 x の値を求める問題は、**逆問題** である。

関数 $f(x)$ が対数関数のときは、逆問題は「対数方程式」と呼ばれることがある。

対数方程式

方程式 $\log_2(x + 1) = 3$ を解いてみよう。
対数の定義から、

ゆえに、

注意

上の解法において、対数が定義できない

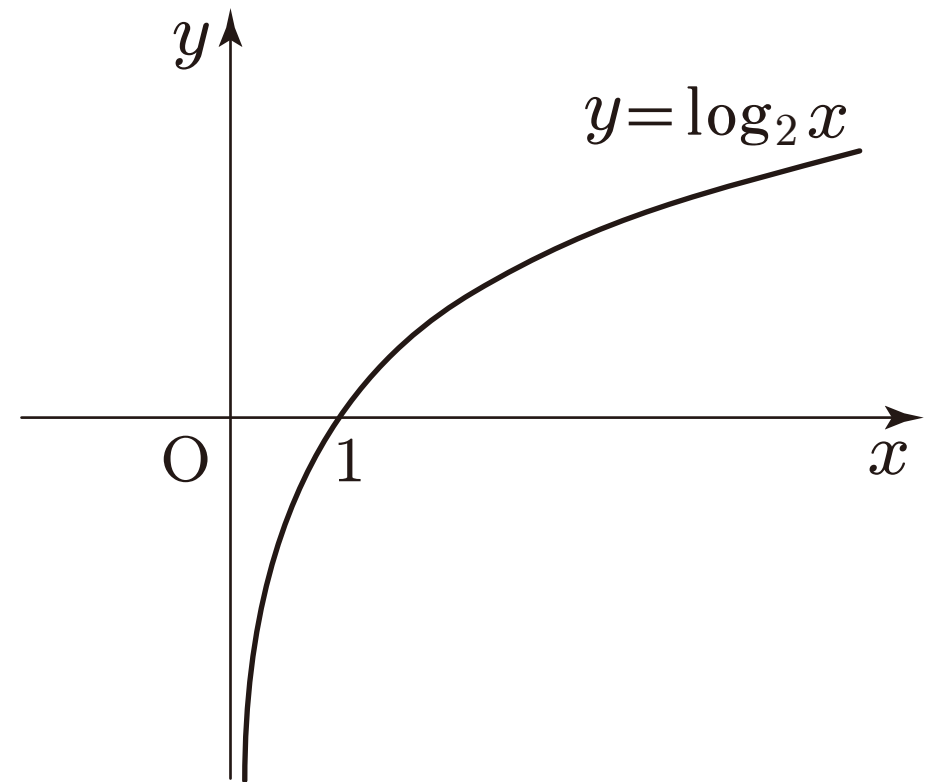
$$x + 1 \leq 0$$

となる x の値が導かれることはあり得ない！

対数の大小比較

例 対数で表された2数 $\log_2 3$ と $\log_4 5$ の大きさを比較するには、**底を統一**できると簡単である。

$\log_4 5$ を2を底とする対数になおすと、
 $\log_4 5 =$



ここで、 $\log_4 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 4}$ であるから、

ゆえに、

対数不等式

例題

不等式 $\log_3(x - 1) < 2$ を解け.

【解】 $\log_3(x - 1) < 2$

注意 上の解で, $1 < x$ は不可欠である. たとえば, $x = 0$ は, $x - 1 < 3^2$ を満たすが, $\log_3(x - 1) < \log_3 3^2$ を満たさない!

一般に, $\log_3 x_1 < \log_3 x_2 \iff 0 < x_1 < x_2$

例題

方程式 $\log_2 x + \log_2(x - 3) = 2$ を解け.

【解】 真数は正の数でなければならないから,

$$x > 0 \text{ かつ } x - 3 > 0 \quad \text{ゆえに, } x > 3 \dots \textcircled{1}$$

条件 ① の下で, 与えられた方程式を変形すると,

$$\log_2 x(x - 3) =$$

すなわち, $\dots \textcircled{2}$

①, ②から,

注 条件 ① のかわりに ① より弱い条件 $x > 0$ を
②と連立しても良い. なぜか?

「真数条件」の必要性の根拠

$$(1) \log_2 x + \log_2(x - 3) = 2$$

$$(2) \log_2 x(x - 3) = \log_2 2^2$$

$$(3) x(x - 3) = 2^2$$

$$(4) x = -1 \text{ または } x = 4$$

(4) \implies (1) は確かにいえない！では、

$$(1) \implies (2) \implies (3) \implies (4)$$

の変形の中で、逆が成り立たないのは、どこか？