数学Ⅱ

第５章　「指数関数と対数関数」

14. 高い立場から見た逆関数

hm2-5-14

（pdf ファイル）

EDUPA

【発展】対応としての関数概念

X, Y を数の集合とする.

$y = f(x)$ が，集合 X から集合 Y への **関数** であるとは,

集合 X の 任意の要素 x に対して，$y = f(x)$ によって，集合 Y の 要素 y がただ一つ定まる

ということである.

例1 $y = x^2$ は，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ から，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ への関数を与える.

例2 $y = \sin x$ は，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ から，集合 $[-1, 1] = \{\, t \mid -1 \leqq t \leqq 1\}$ への関数を与える.

【発展】特別の性質をもつ関数

集合 X から集合 Y への関数 $y = f(x)$ が,

1. “ 任意の $y \in Y$ に対して, $f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する ”

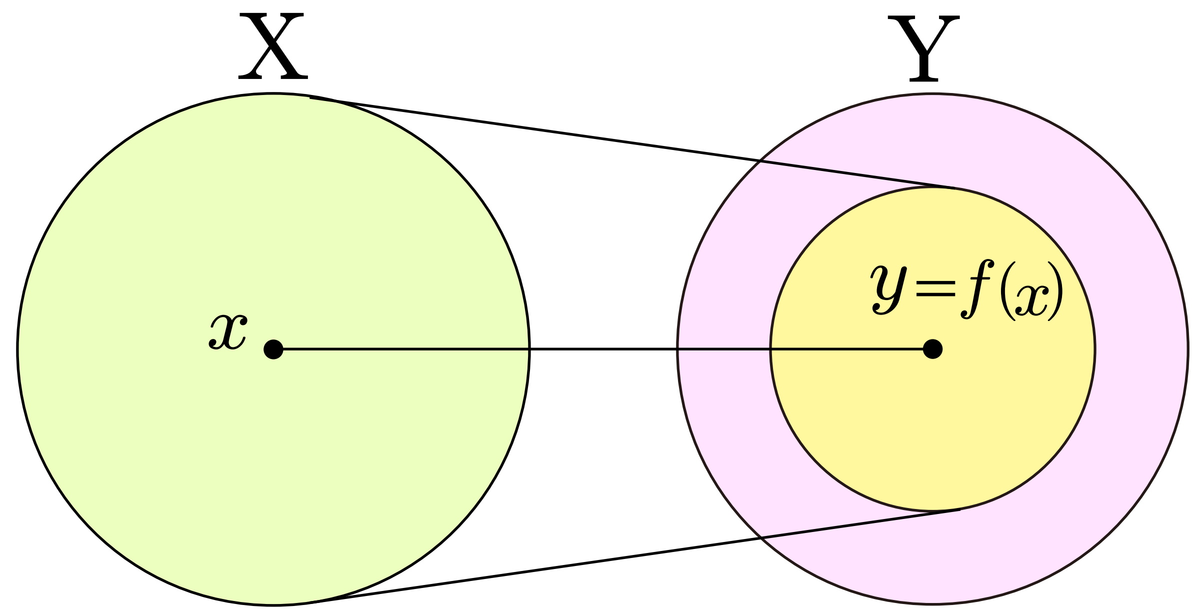
を満たすことを, 関数 $y = f(x)$ は, X から Y の上への関数 であるという.

2. “ 任意の $x_1,\ x_2 \in X$ に対して,

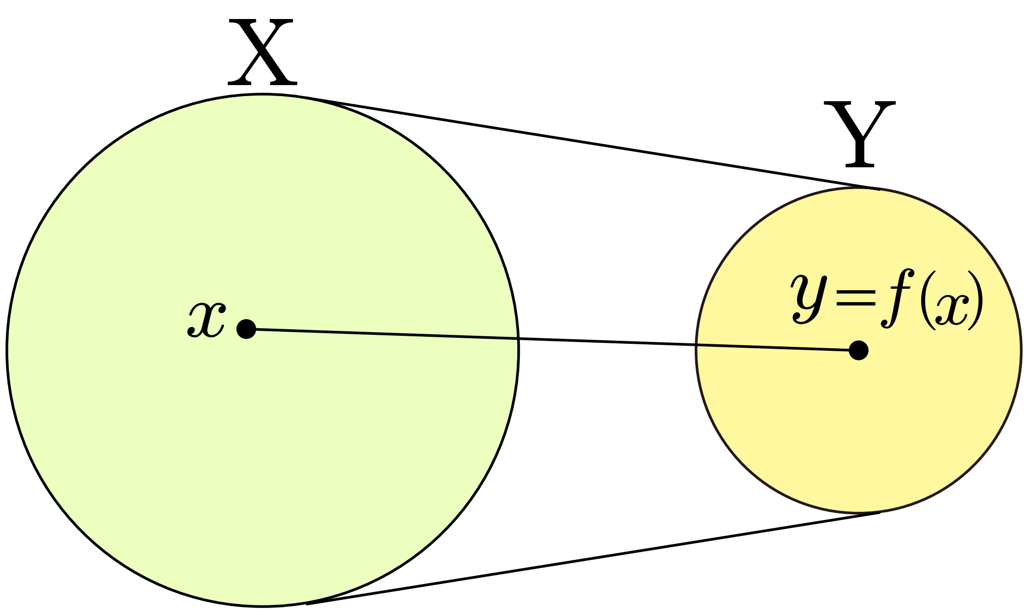
$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2 \text{ ”}$$

を満たすことを, 関数 $y = f(x)$ は, $1:1$ の関数 であるという.

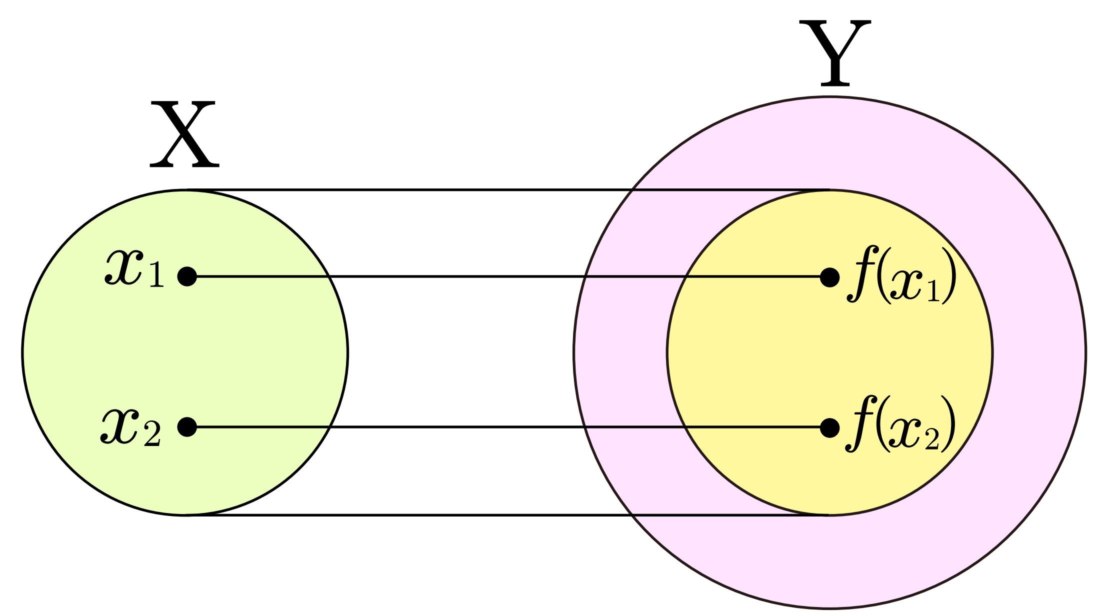
「上への関数」「1:1の関数」の図解



一般の関数



上への関数



1:1の関数

例

1. 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ とする．関数 $y = x^2$ は，$\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ の上への関数ではない． $1:1$ の関数でもない．

2. 関数 $y = \sin x$ は，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ から，集合 $[-1, 1] = \{\, t \mid -1 \leqq t \leqq 1\}$ の上への関数である．しかし，$1:1$ の関数ではない．

3. 関数 $y = 2^x$ は，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ から，正の実数全体の集合 $\mathbb{R}^*$ の上への $1:1$ の関数である．

【発展】逆関数

関数 $y = f(x)$ が，集合 X から集合 Y の 上への $1:1$ の関数であるとき，任意の $y \in Y$ に対し，$y = f(x)$ を満たす $x \in X$ がただ一つ存在する．

任意の $y \in Y$ に，このような $x \in X$ を対応させる関数を関数 f の **逆関数** といい f^{-1} で表す．

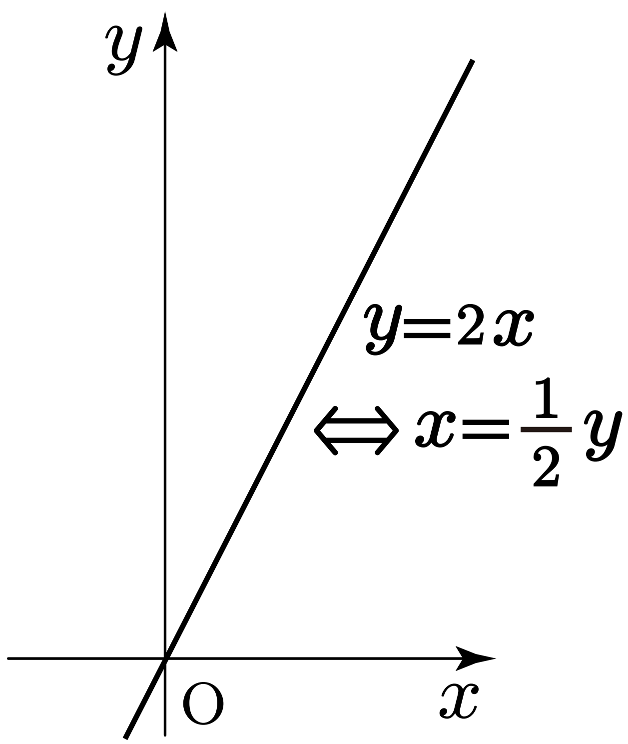
注 f^{-1} は [エフ インバース] と読む．

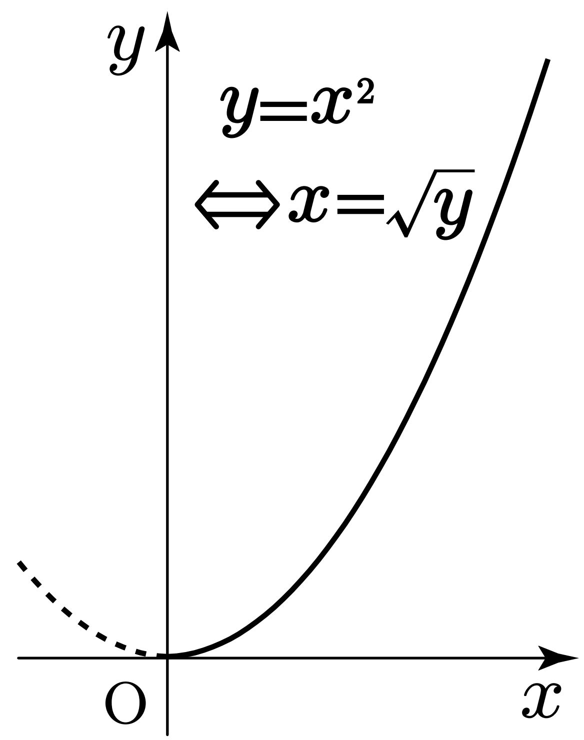
f^{-1} が定義できるとき

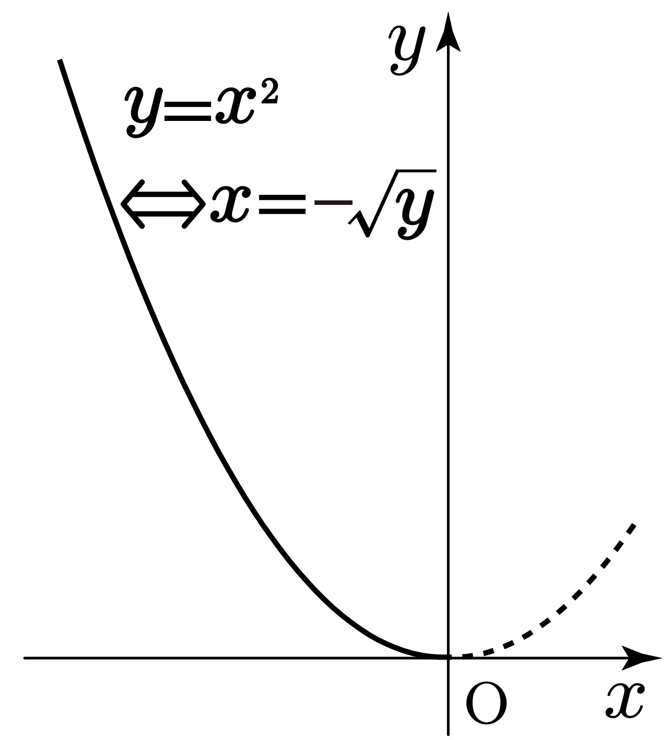
$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

【発展】逆関数の例

1.　実数全体 $\mathbb{R}$ から 実数全体$\mathbb{R}$ への関数 $y = 2x$ の逆関数は $x = \dfrac{1}{2}y$
2.　負でない実数全体 $\mathbb{R}^+$ から負でない実数全体 $\mathbb{R}^+$ の上への関数 $y = x^2$ の逆関数は $x = \sqrt{y}$
3.　正でない実数全体 $\mathbb{R}^-$ から負でない実数全体 $\mathbb{R}^+$ の上への関数 $y = x^2$ の逆関数は $x = -\sqrt{y}$







【発展】関数についての伝統的慣習

　関数を考えるときは，　変数値には x，関数値には y を用いるという慣習がある．

そこで関数 $y=f(x)$ の逆関数を，本来は，$x=f^{-1}(y)$ と表すべきところ，　機械的に

x と y を交換

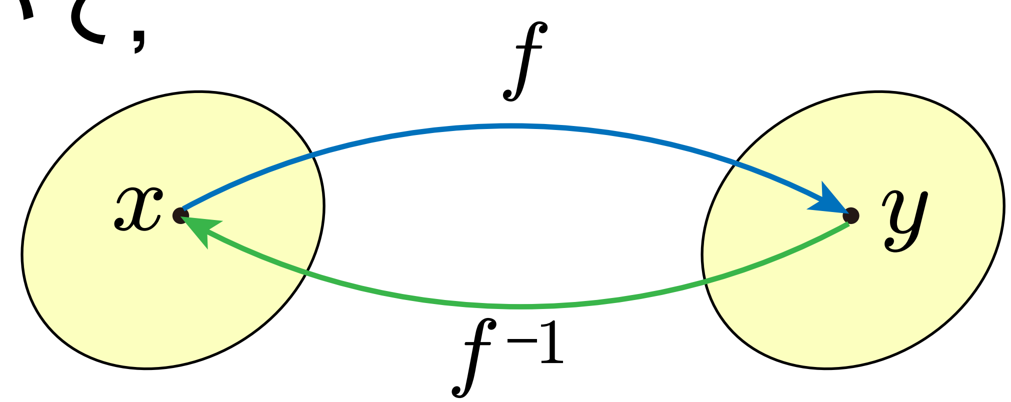
して，$y = f^{-1}(x)$ と表すことが少なくない．

　この慣習の下で，　対数関数 $y = \log_a x$ は，指数関数 $y = a^x$ の逆関数である，といわれる．

【発展】関数とその逆関数の性質

関数 f とその逆関数 f^{-1} について,

$$f^{-1}(f(x)) = x$$
$$f(f^{-1}(y)) = y$$



(例1)　$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ の関数 $f(x) = x^2$ に対し

$f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ であるので

$$f^{-1}(f(x)) = \qquad \text{(ただし, } x \geqq 0\text{)}$$
$$f(f^{-1}(y)) = \qquad \text{(ただし, } y \geqq 0\text{)}$$

(例2)　$f(x) = a^x$ のとき $f^{-1}(x) = \log_a x$ である

ので

$$f^{-1}(f(x)) =$$
$$f(f^{-1}(y)) = \qquad \text{(ただし, } y > 0\text{)}$$