数学 II

第４章　「三角関数」

25. 加法定理と指数法則

hm2-4-25

(pdf ファイル)

【発展】加法定理の深い意味に向かって

正弦，余弦の加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

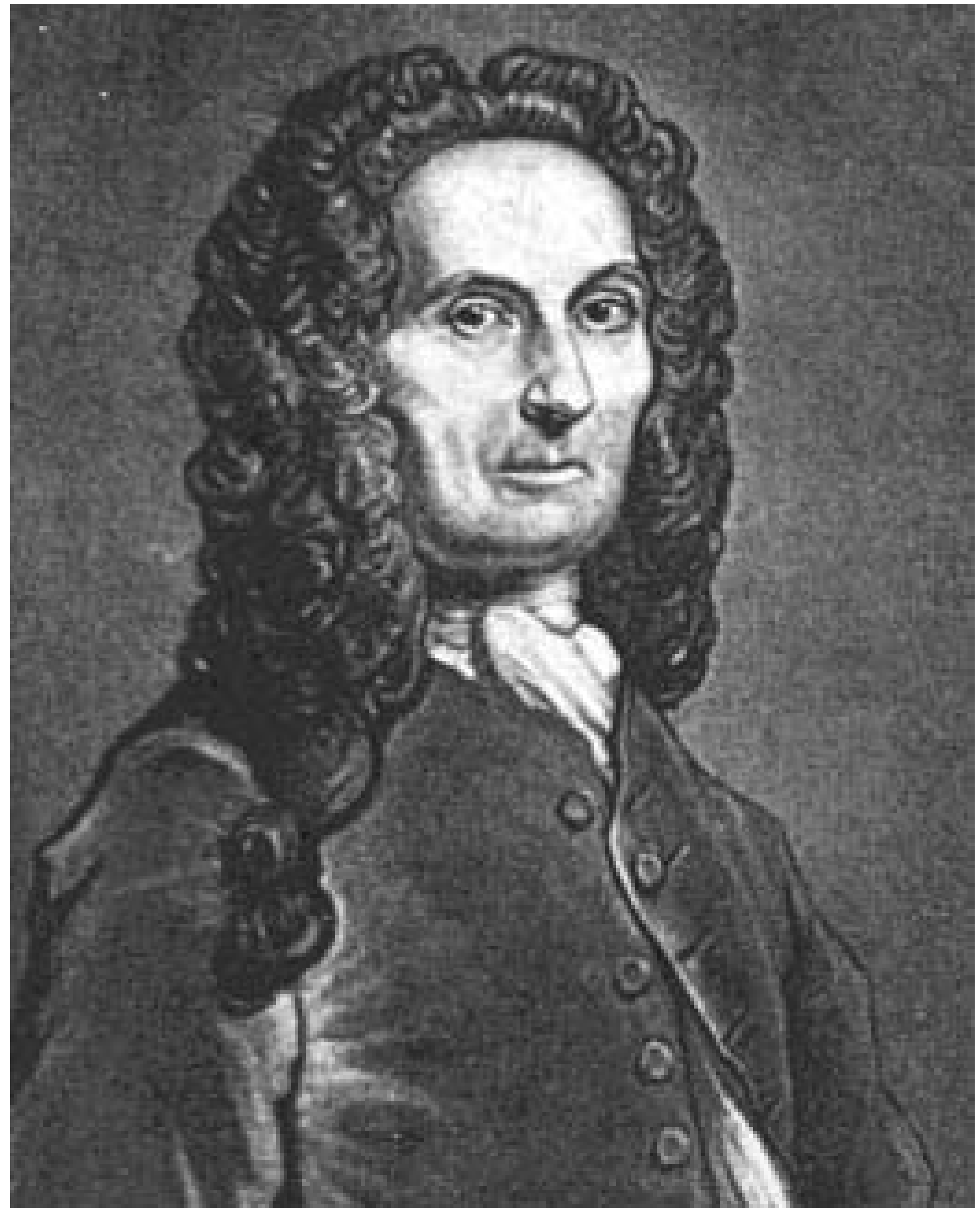
は，見るからに煩雑な形である．

実は，複素数(2乗して負の数となる虚数を含む拡大された数の世界)を仮定すると，三角関数は、指数関数と関連することが明確に分かる．

その出発点となるのは，「オイラー の公式」と呼ばれる次の式である．

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

Leonhard Euler, 1707-1783



Abraham de Moivre
1667-1754

【発展】三角関数の加法定理と指数法則

オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

と，指数法則

$$e^{a+b} = e^{a} \cdot e^{b}$$

が，$a = i\alpha$, $b = i\beta$ の場合にも成り立つと仮定して，

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$$

の両辺を上の公式に基づいて書き直せば,

$$\begin{aligned} &\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) \\ &= (\cos\alpha + i\sin\alpha)\cdot(\cos\beta + i\sin\beta) \end{aligned}$$

となる．両辺を計算すれば，三角関数の加法定理が得られる．