数学 II

第４章　「三角関数」

22. 三角関数の合成

hm2-4-22

(pdf ファイル)

EDUPA

三角関数の合成

$a = b = 0$ ではないとする.

$a\sin\theta + b\sin\theta$ において,

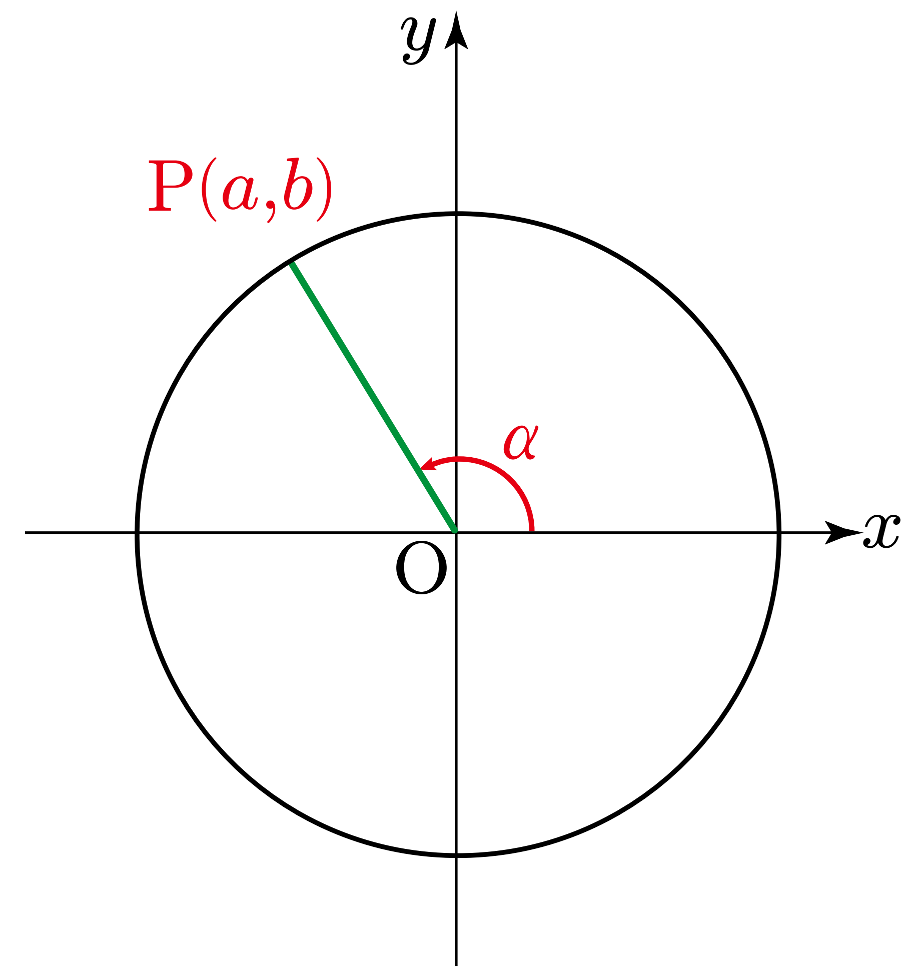
$(a,\ b)$ を座標とする点をP

とし, 動径 OP が x 軸の正

の向きとなす角を α とし,

$\mathrm{OP} = \sqrt{a^2 + b^2} = r$ とする

と,



$$a = r\cos\alpha,\quad b = r\sin\alpha$$

よって,

$$a\sin\theta + b\cos\theta = r\cos\alpha\sin\theta + r\sin\alpha\cos\theta$$

$$=$$

このような変形を **三角関数の合成** という.

三角関数の合成の手順

$a\sin\theta + b\cos\theta$ において，

(1) $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ を計算する

(2) 全体を r で括(くく)る

(3) $\sin\theta$, $\cos\theta$ の新しい係数 $\dfrac{a}{r}$, $\dfrac{b}{r}$ に対し，

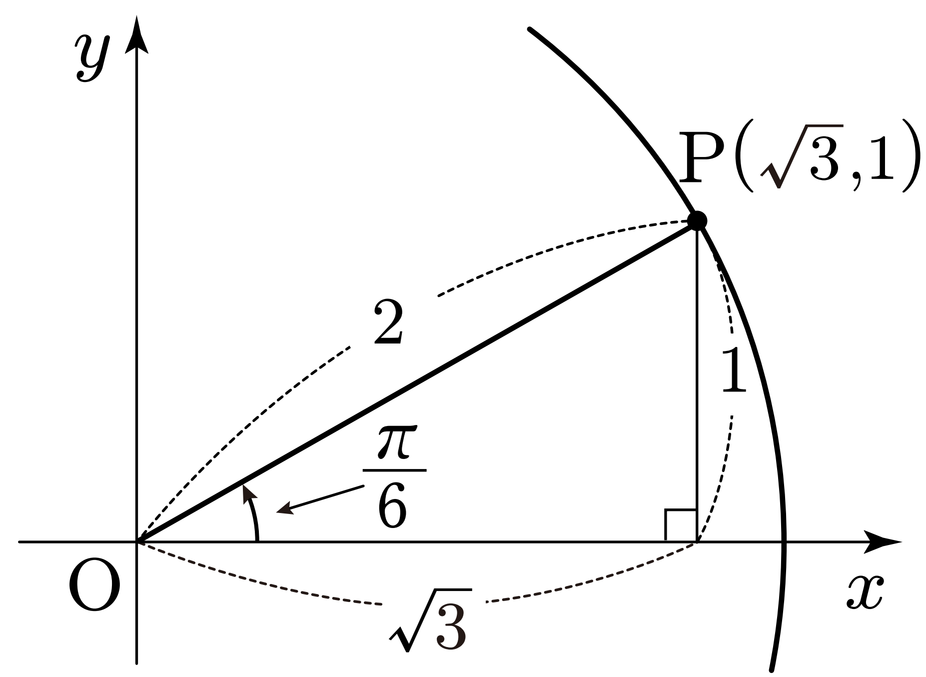
$$\cos\alpha = \frac{a}{r},\ \ \sin\alpha = \frac{b}{r}$$

となる α を見つける．

(4) $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

例

$$
\begin{aligned}
\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta &= \qquad \left(\qquad \sin\theta + \qquad \cos\theta \right) \\
&= \qquad \left(\qquad\quad \sin\theta + \qquad\quad \cos\theta \right) \\
&= \qquad \sin\left(\theta + \qquad \right)
\end{aligned}
$$



三角関数の合成の変種

1° $a\sin\theta - b\cos\theta$ の場合：

公式　$\sin(\theta-\alpha) = \sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha$

にあてはめる.

2° $-a\sin\theta + b\cos\theta$ や $-a\sin\theta - b\cos\theta$ の場合：

$-(a\sin\theta - b\cos\theta)$ と変形すると，1° のように

$$-\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta-\alpha) =$$

$-(a\sin\theta + b\cos\theta)$ と変形すると標準的な方法で

$$-\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha) =$$

しかし，他にも方法がある.

例

$$
\begin{aligned}
\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta &= \left(\qquad \sin\theta - \qquad \cos\theta \right) \\
&= \left(\qquad \sin\theta - \qquad \cos\theta \right) \\
&= \sin\left(\theta + \qquad \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta &= \left(\qquad \sin\theta - \qquad \cos\theta \right) \\
&= \left(\qquad \sin\theta - \qquad \cos\theta \right) \\
&= \sin\left(\theta + \qquad \right)
\end{aligned}
$$

余弦の加法定理を応用した合成

例

$$\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right)$$