数学 II

第４章　「三角関数」

20. 半角の公式

hm2-4-20

(pdf ファイル)

半角の公式に向かって

余弦の２倍角の公式

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

から

$$\sin^2\alpha = \qquad\qquad \cos^2\alpha =$$

よって，また，

$$\tan^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}{\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

半角の公式

α を $\dfrac{\alpha}{2}$ に置き換えると次の半角の公式が得られる.

半角の公式

正弦 ： $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$

余弦 ： $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

正接 ： $\tan^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

$\dfrac{\alpha}{2}$ が鋭角なら, $\sin\dfrac{\alpha}{2} =$

$\cos\dfrac{\alpha}{2} =$ $\qquad\qquad$ $\tan\dfrac{\alpha}{2} =$

半角の公式の意義

鋭角 α について $\cos\alpha$ の値がわかれば, $n = 1, 2, \cdots$ について $\cos\dfrac{\alpha}{2^n}$, $\sin\dfrac{\alpha}{2^n}$ の値がわかる.

例

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} =$$

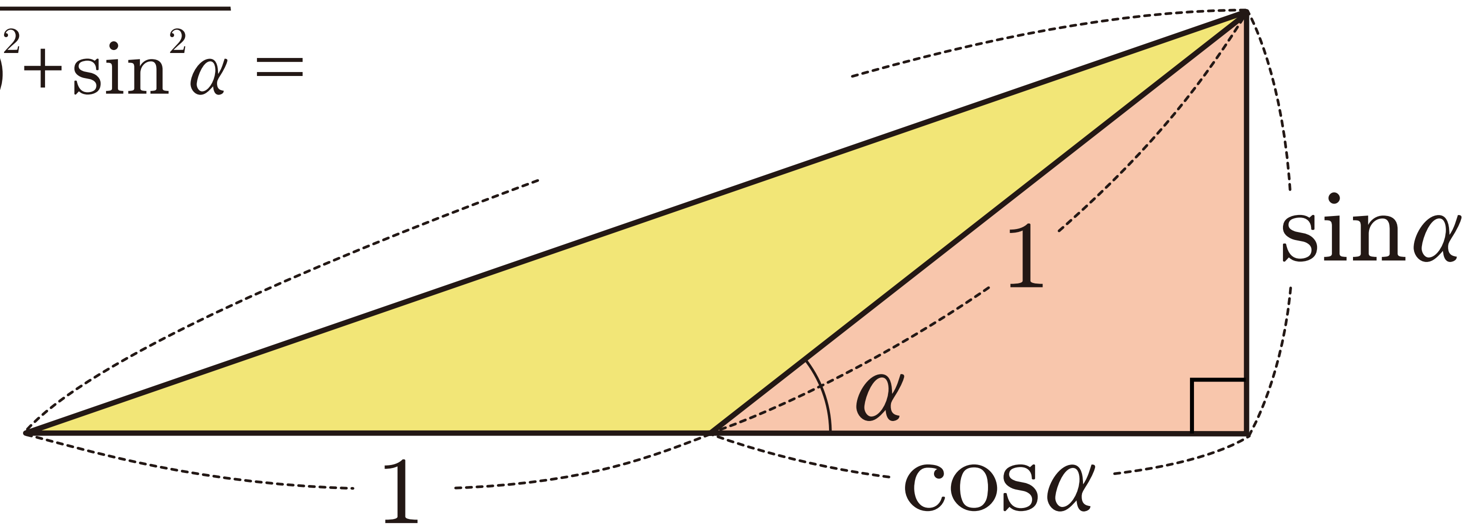
$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} =$$

また, $\quad \cos\dfrac{\pi}{16} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{8}}{2}} =$

半角公式の図形的導出

α が鋭角のとき，

$$\sqrt{(1+\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha} =$$



$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sqrt{2(1+\cos\alpha)}} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1(1+\cos\alpha)}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$