

第4章 「三角関数」

16. 加法定理（正弦・余弦）と  
その証明(2)

---

hm2-4-16

(pdf ファイル)

# 加法定理

2つの角  $\alpha$  と  $\beta$  の **和  $\alpha + \beta$  の三角関数** は、次のように、つねに、 $\alpha, \beta$  の三角関数で表すことができる。

特に重要なのは、次の4つである。

## 正弦と余弦の加法定理

$$\boxed{1} \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\boxed{2} \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\boxed{3} \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\boxed{4} \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

## 4 から 3 の導出

公式 **4**

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

において、 $\beta$  の代わりに、 $-\beta$  とおくと、

$$\cos\{\alpha - (-\beta)\} = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta)$$

ここで、左辺は、 $\cos(\alpha + \beta)$ 、また、右辺において、

$$\cos(-\beta) = \cos \beta, \quad \sin(-\beta) = -\sin \beta \quad \text{であるから}$$

$$\mathbf{3} \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

## 4 から 1 の導出

公式 **4**  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

において、 $\alpha$  の代わりに、 $\frac{\pi}{2} - \alpha$  とおくと、

$$\begin{aligned} & \cos\left\{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right\} \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \quad , \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

を用いると、

$$\mathbf{1} \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

## 4 から 2 の導出

公式 **4**  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

において、 $\alpha$  の代わりに  $\frac{\pi}{2} + \alpha$  とおくと、

$$\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \beta\right\}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin \beta$$

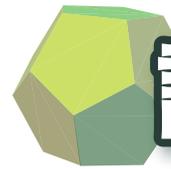
となる。ここで、

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + (\alpha - \beta)\right) =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \quad , \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) =$$

を用いると、

$$\mathbf{2} \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$



# 証明の流れの確認

■ **4** の証明

■ **4**  $\implies$  **3**

■ **4**  $\implies$  **1**

■ **4**  $\implies$  **2**

こうして、**1**、**2**、**3**、**4** のすべてが証明された！

ただし、これが唯一の方法ではない。

## 1 から 2 の導出

公式 1

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

において、 $\beta$  の代わりに、 $-\beta$  とおくと、

$$\sin\{\alpha + \quad\} = \sin \alpha \cos \quad + \cos \alpha \sin$$

ここで、左辺は、 $\sin(\alpha - \beta)$ 、また、右辺において、

$$\cos(-\beta) = \cos \beta, \quad \sin(-\beta) = -\sin \beta \quad \text{であるから}$$

$$\boxed{2} \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$