数学 II

第４章　「三角関数」

16. 加法定理 (正弦・余弦) とその証明 (2)

hm2-4-16

(pdf ファイル)

EDUPA

加法定理

2つの角 α と β の **和 $\alpha+\beta$ の三角関数** は，次のように，つねに，$\alpha\,,\beta$ の三角関数で表すことができる．

特に重要なのは，次の4つである．

正弦と余弦の加法定理

$\boxed{1}$ $$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$\boxed{2}$ $$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$\boxed{3}$ $$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$\boxed{4}$ $$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$\boxed{4}$から$\boxed{3}$の導出

公式 $\boxed{4}$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

において，β の代わりに，$-\beta$ とおくと，

$$\cos\{\alpha- \qquad\qquad \}=\cos\alpha\cos \qquad\qquad +\sin\alpha\sin$$

ここで，左辺は，　　　　　　　　　　，また，右辺において，

$\cos(-\beta)=$ 　　　　　　, $\sin(-\beta)=$ 　　　　　　であるから

$\boxed{3}$ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\boxed{4}$から$\boxed{1}$の導出

公式 $\boxed{4}$ $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

において，α の代わりに，$\dfrac{\pi}{2} - \alpha$ とおくと，

$$\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right\}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta$$

となる．ここで，

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) =$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \qquad\qquad,\quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

を用いると，

$\boxed{1}$ $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\boxed{4}$から $\boxed{2}$ の導出

公式 $\boxed{4}$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

において，α の代わりに $\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ とおくと，

$$\cos\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\beta\right\}$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\beta$$

となる．ここで，

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+(\alpha-\beta)\right)=$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)= \qquad\qquad ,\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=$$

を用いると，

$\boxed{2}$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

証明の流れの確認

- $\boxed{4}$ の証明
- $\boxed{4} \Longrightarrow \boxed{3}$
- $\boxed{4} \Longrightarrow \boxed{1}$
- $\boxed{4} \Longrightarrow \boxed{2}$

こうして, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ のすべてが証明された！

ただし，これが唯一の方法ではない.

$\boxed{1}$から$\boxed{2}$の導出

公式 $\boxed{1}$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

において，β の代わりに，$-\beta$ とおくと，

$$\sin\{\alpha+\qquad\}=\sin\alpha\cos\qquad+\cos\alpha\sin$$

ここで，左辺は，　　　　　　　，また，右辺において，
$\cos(-\beta)=$　　　　　，$\sin(-\beta)=$　　　　　であるから

$\boxed{2}$ $$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$