数学 II

第４章　「三角関数」

15. 加法定理 (正弦･余弦) とその証明 (1)

hm2-4-15

(pdf ファイル)

EDUPA

加法定理

2つの角 α と β の **和 $\alpha+\beta$ の三角関数** は，次のように，つねに，α,β の三角関数で表すことができる．

特に重要なのは，次の4つである．

正弦と余弦の加法定理

$\boxed{1}$ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\boxed{2}$ $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\boxed{3}$ $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\boxed{4}$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

加法定理4の証明

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

右の図のように,　座標平面上で,
角 α および角 β を表す動径と
単位円の交点をそれぞれ P, Q と
すると, P, Q の座標は

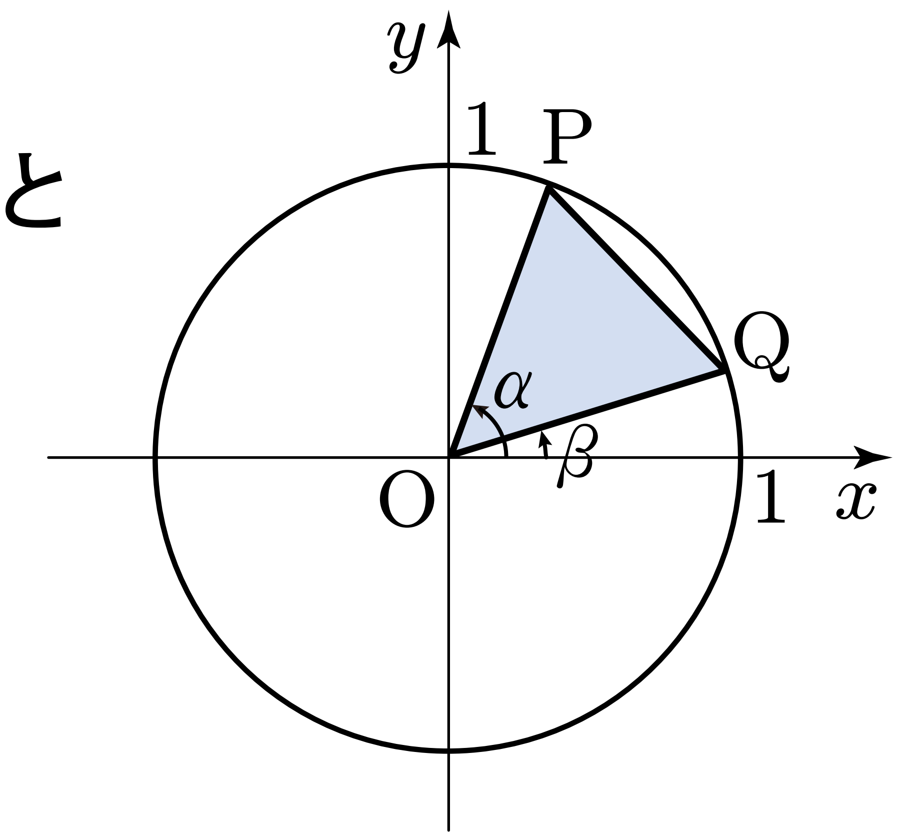
$\mathrm{P}(\qquad\qquad , \qquad\qquad)$

$\mathrm{Q}(\qquad\qquad , \qquad\qquad)$

であるから,

$\mathrm{PQ}^2 =$

$\qquad\quad =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots$ ①

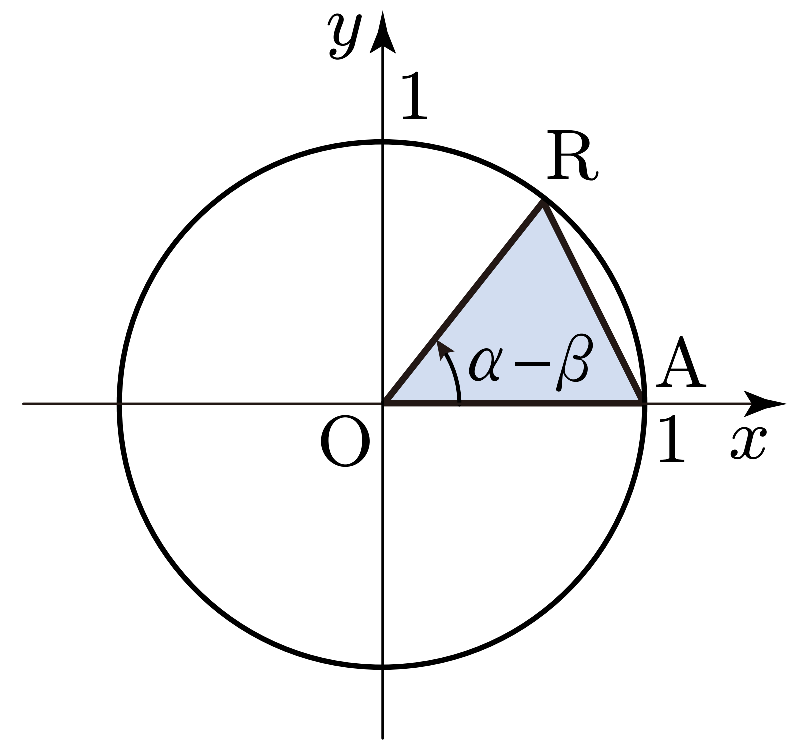


加法定理 4 の証明（続）

一方，原点 O を中心として，$\triangle$OPQ を　　　だけ回転し，点 Q が A(1, 0) に重なるようにする．このとき，点 P が移った点を R とすると，R の座標は，

R(　　　　, 　　　　)

である．したがって，



$$\mathrm{RA}^2 = \{\qquad\qquad\}^2 + \{\qquad\qquad\}^2$$

$$= \qquad\qquad \cdots ②$$

PQ = RA であるから，①と② を見比べて，

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \quad \blacksquare$$

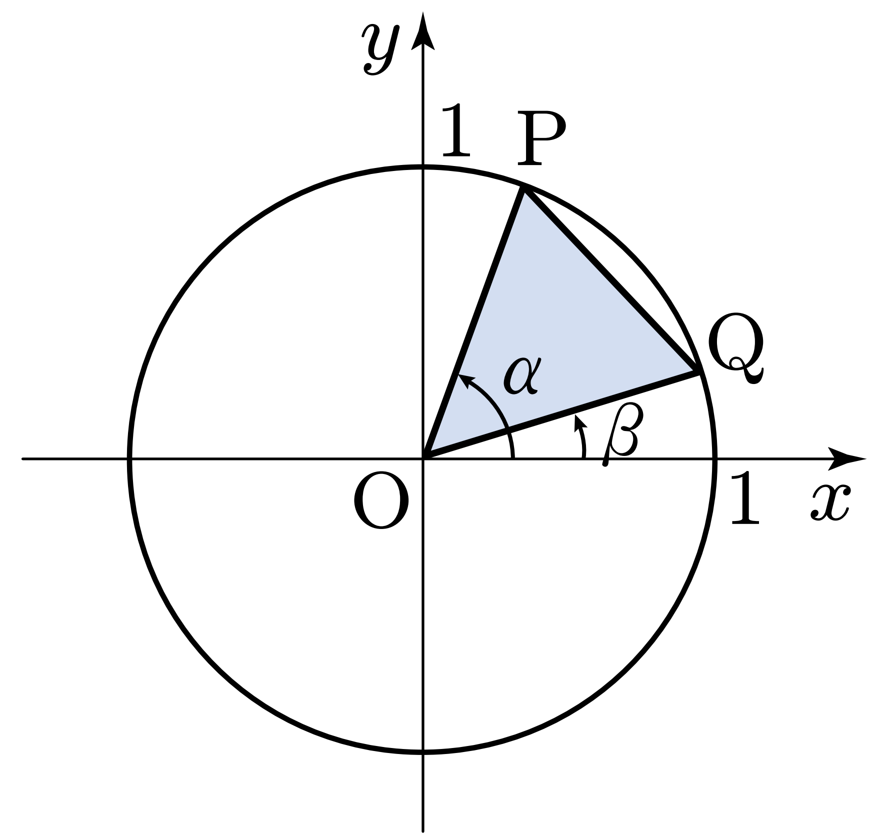
加法定理 $\boxed{4}$ の別証

三角形 OPQ で，余弦定理を使えば，

$$\mathrm{PQ}^2 = \mathrm{OP}^2 + \mathrm{OQ}^2 - 2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}\cdot\cos\angle\mathrm{POQ}$$

$$=$$

$$=$$

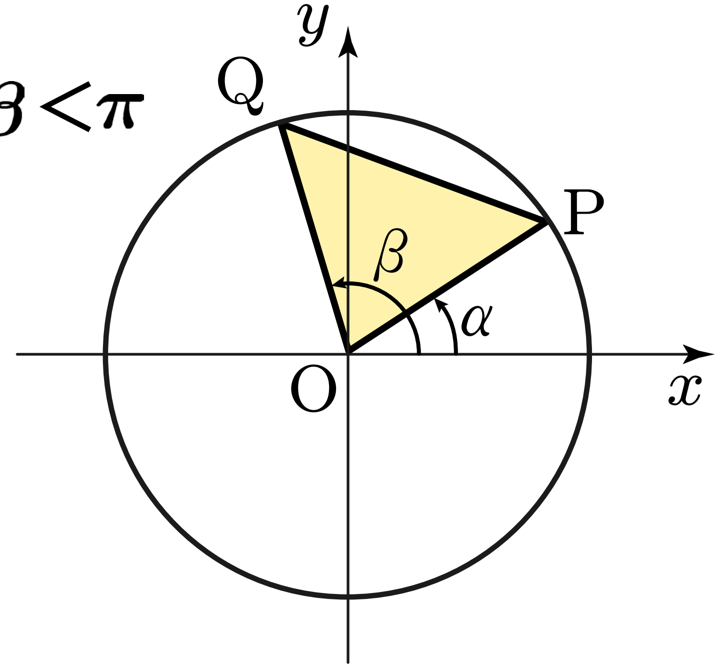


それぞれの証明の利点を考える

いろいろな配置の場合がある！

$0<\alpha<\beta<\pi$

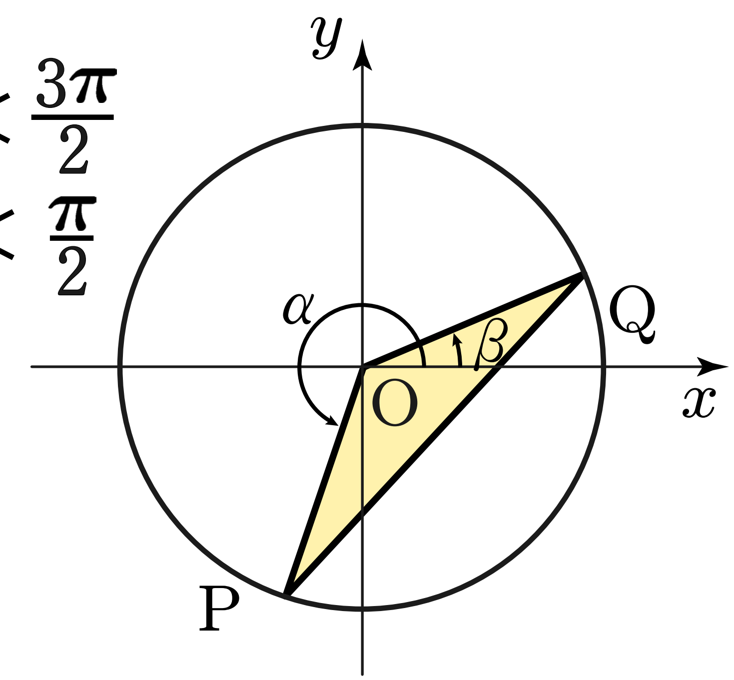
のとき



$\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$

$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$

のとき



$\angle\mathrm{POQ}=$

$\angle\mathrm{POQ}=$