数学 II

第２章　「複素数と方程式」

8. 解と係数の関係の応用

---

hm2-2-8

(pdf ファイル)

EDUPA

例 2 次方程式 $2x^2+6x-5=0$ の2つの解を α,β とするとき, 次の値を求める.

(1) $\alpha^2+\beta^2$ (2) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$

解と係数の関係から, $\alpha+\beta=$, $\alpha\beta=$

したがって,

(1) $\alpha^2+\beta^2=$

(2) $\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=$

注意 この方法は α,β の値 $\dfrac{-3\pm\sqrt{19}}{2}$ を直接, 与えられた式に代入するよりはるかに効率的である.

例題

2 次方程式 $x^2 - px + 18 = 0$ の 1 つの解が，他の解の 2 倍であるとき，定数 p の値を求めよ.

【解】条件より 2 つの解は α, 2α とおける.

このとき，解と係数の関係から，

$$\begin{cases} \alpha + 2\alpha = p \\ \alpha \cdot 2\alpha = 18 \end{cases}$$

すなわち，

$$\begin{cases} & \cdots ① \\ & \cdots ② \end{cases}$$

より，　よって，

したがって，　より，

特別の連立方程式

$$\begin{cases} \alpha + \beta = p \\ \alpha\beta = q \end{cases}$$

を満たす，α，β は2次方程式

$$x^2 - px + q = 0$$

の2解である.

注意 ここで，未知数を表す文字 x には意味がない.

$$t^2 - pt + q = 0$$

$$u^2 - pu + q = 0$$

と表しても同じである.

例

連立方程式 $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=10 \end{cases}$ の解は，t についての 2 次方程式

$$\cdots ①$$

の 2 解である．① を解いて

これより，連立方程式の解は，

例題

2 次方程式　$2x^2 - 5x + 6 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき，2 数 $\alpha+1$，$\beta+1$ を解とする 2 次方程式を 1 つ求めよ.

【解】解と係数の関係から，　$\alpha + \beta = \dfrac{5}{2}$, $\alpha\beta = 3$

したがって，

$$\begin{cases} (\alpha+1)+(\beta+1) = \\ (\alpha+1)(\beta+1) = \end{cases}$$

よって，$\alpha+1$，$\beta+1$ を解とする 2 次方程式の 1 つは，