数学 II

第２章　「複素数と方程式」

11. 高次方程式②

hm2-2-11

（pdf ファイル）

因数定理を利用した高次方程式の解法

例題

3次方程式 $x^3+x^2+4=0$ を解け.

【解】$f(x)=x^3+x^2+4$ とおくと,

$$f(\qquad)=$$

よって, $f(x)$ は を因数にもつ.

$$x^3+x^2+4=$$

ゆえに,

$$x=$$

高次方程式の重解

たとえば，2 次方程式 $(x-1)^2=0$ の解 $x=1$ を重解と呼んだが，　これをていねいにいえば 2 重解である．

同様に，3 次方程式 $(x-1)^3=0$ の解 $x=1$ は 3 重解，4 次方程式 $(x-1)^4=0$ の解 $x=1$ は 4 重解と呼ぶ．

一般に，m 重解を m 個の解として数えることにすると，

複素数の範囲では n 次方程式は n 個の解をもつ

ことが知られている．

例題

3次方程式 $x^3+ax^2+bx+5=0$ が $1+2i$ を解にもつとき，実数 a,b の値と，他の解を求めよ.

【解】$1+2i$ を解にもつことから，

$$(1+2i)^3+a(1+2i)^2+b(1+2i)+5=0$$

（続）（３次方程式の解法）

よって，与えられた３次方程式は

$$x^3 - x^2 + 3x + 5 = 0$$

であり，これを解くと

$$x =$$

ゆえに，$a = -1$，$b = 3$

$1 + 2i$ 以外の他の解は -1，$1 - 2i$

【探求】複素数と方程式

自然数 $\overset{①}{\Longrightarrow}$ 整数 $\overset{②}{\Longrightarrow}$ 有理数 $\overset{③}{\Longrightarrow}$ 実数

という数の集合の拡大は，方程式の立場からみると，

① $x+7=5$ のような方程式も解けるようになる

② $5x+7=3$ のような方程式も解けるようになる

② $x^2=2$ のような方程式も解けるようになる

のように，　解くことのできる方程式の範囲を拡げるという意味をもっていた．

この立場から考えると，実数 $\overset{④}{\Longrightarrow}$ 複素数という数の集合の拡大は？

複素数への拡大の意味

　この立場から考えると，実数 $\Longrightarrow$ 複素数という数の集合の拡大は，解を考えることのできる方程式の範囲を

$$ax^2+bx+c=0 \quad (a,b,c：\text{任意の実数})$$

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \quad (a,b,c,d：\text{任意の実数})$$

のような一般的な形のものにまで一気に拡げたということができる.