

第1章 「式と証明」

9. 平方の大小(三角不等式)

hm2-1-9

(pdf ファイル)



平方の大小

$a > b$ のとき, つねに $a^2 > b^2$ が成り立つとは限らない.

例題

$a > 0, b > 0$ のとき, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$ を証明せよ.

証明

$a > 0, b > 0$ のとき $\sqrt{a} + \sqrt{b} > 0, \sqrt{a+b} > 0$ であるので, それぞれを 2 乗して大小を比較することができる.

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a+b})^2$$

=

=

したがって, $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2$

ゆえに, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

三角不等式の証明に向けて

不等式

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad \langle \text{三角不等式} \rangle$$

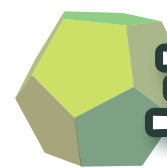
を，次の「実数の絶対値の性質」を用いて証明する。

実数 x, y について，次の関係が成り立つ。

$$(i) \quad |x|^2 = x^2$$

$$(ii) \quad |x| |y| = |xy|$$

$$(iii) \quad |x| \geq x$$



三角不等式の証明

$|a| + |b| \geq 0$, $|a + b| \geq 0$ であるから, 両辺を 2 乗して比較する.

$$(|a| + |b|)^2 - |a + b|^2$$

=