数学 II

第１章　「式と証明」

9. 平方の大小(三角不等式)

hm2-1-9

(pdf ファイル)

平方の大小

$a > b$ のとき，つねに $a^2 > b^2$ が成り立つとは限らない．

例題

$a>0,\ b>0$ のとき，$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$ を証明せよ.

証明 $a>0,\ b>0$ のとき $\sqrt{a}+\sqrt{b}>0,\ \sqrt{a+b}>0$ であるので，それぞれを 2 乗して大小を比較することができる.

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2$$

$$=$$

$$=$$

したがって，　$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$　　$(\sqrt{a+b})^2$

ゆえに，　$\sqrt{a}+\sqrt{b}$　　$\sqrt{a+b}$

三角不等式の証明に向けて

不等式

$$|\,a+b\,| \leqq |\,a\,| + |\,b\,|$$ 《三角不等式》

を，次の「実数の絶対値の性質」を用いて証明する．

実数 $x\,,y$ について，次の関係が成り立つ．

(i) $|\,x\,|^2 = x^2$

(ii) $|\,x\,||\,y\,| = |\,xy\,|$

(iii) $|\,x\,| \geqq x$

三角不等式の証明

$|a|+|b| \geqq 0$, $|a+b| \geqq 0$ であるから，両辺を 2 乗して比較する.

$$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2$$

$$=$$