数学Ⅱ

第１章　「式と証明」

10. 相加相乗その他絶対不等式とその応用①

hm2-1-10

(pdf ファイル)

相加平均と相乗平均

　与えられた2数に対し，それらの平均は，通常，「たして2で割る」ことによって求められる．

相加平均と相乗平均の大小を比較する

$a \geqq 0,\ b \geqq 0$ のとき,

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{2}$$

$$= \frac{\qquad\qquad\qquad\qquad}{2}$$

よって, $$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

相加平均，相乗平均の不等式

定理

$a \geqq 0$, $b \geqq 0$ のとき，

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

ここで，

$$\text{等号が成り立つ} \iff a = b$$

注意 この定理は，次の形で使うことも多い．

$a \geqq 0$, $b \geqq 0$ のとき，

$$a + b \geqq 2\sqrt{ab}$$

例題

$a > 0$, のとき，不等式 $a + \dfrac{1}{a} \geqq 2$ を証明せよ.

(考察) 正の数とその逆数は，いずれか少なくとも一方が1以上であるから，$a + \dfrac{1}{a} > 1$ であることは明らかである.

しかし，$a + \dfrac{1}{a}$ は, 実はもっと大きい．例えば,

$a = 2$ なら $a + \dfrac{1}{a} =$ 　　　　$a = \dfrac{1}{3}$ なら $a + \dfrac{1}{a} =$

証明 $a > 0$, $\dfrac{1}{a} > 0$ であるから，相加平均，相乗平均の不等式により,

$$a + \frac{1}{a} \geqq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2$$

例題

$a>0$ のとき，不等式 $a+\dfrac{4}{a} \geqq 4$ を証明せよ．
また，等号が成り立つのはどんなときか．

証明 $a>0$，$\dfrac{4}{a}>0$ であるから，相加平均，相乗平均の不等式により，

$$a+\frac{4}{a} \geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}}=4$$

等号が成り立つのは，$a=\dfrac{4}{a}$ のとき，すなわち，$a=2$ のときである．

研究

実数 a, b, c, d について，次に不等式が成り立つ．

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geqq (ac+bd)^2$$

Cauchy の不等式

実際，左辺 $-$ 右辺＝

よって，

（参考）　上の不等式で，等号が成りたつのは，　　　　　　　　のときである．