数学 II

第１章　「式と証明」

1. 整式の割り算

hm2-1-1

(pdf ファイル)

EDUPA

2種類の割り算

割り算　：「25を 7 で割ると，商として3 が立って4 余る」のように余りを考慮したもの.

基本的には，整数の世界でのみ意味をもつ.

除法　：「$25 \div 7 = \dfrac{25}{7}$ 」のように余りを考慮しないもの.

除法において, $a \div b = x$ とは,

$$a = bx$$

となることである. ただし, $b \neq 0$ とする.

除法では，$2.5 \div 0.7$ や $1 \div \sqrt{2}$ なども考えられる.

以下では,「割り算」，「除法」を，この用語で区別しよう.

割り算の基礎

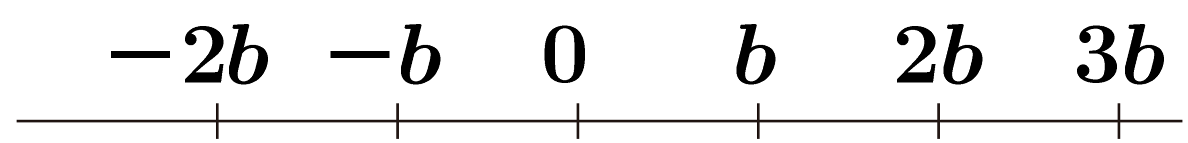
整数 a, b $(b>0)$ に対して,「a を b で割ると, 商 q が立って, 余りが r になる」とは,

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$$

となることである.

（理論）数直線上, 等間隔に並ぶ b の倍数の中に, a をはさむものが 1 組, 厳密にいえば,

$$bq \leqq a < b(q+1)$$



となる整数 q がただ 1 つ存在する.

このとき　$r = a - bq$　とおくと　$0 \leqq r < b$

（参考）商：quotient,　余り：residue

整式の割り算

　整式についても整数の場合と同じように割り算を定義することができる.

　すなわち，与えられた整式 $A=A(x)$, $B=B(x)$ に対し，

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ (R\text{ の次数}) < (B\text{ の次数}) \end{cases}$$

となる整式 $Q=Q(x)$，$R=R(x)$ が，ただ１組存在する.

　そこで，$Q(x), R(x)$ のことを，それぞれ，$A(x)$ を $B(x)$ で割ったときの **商**，**余り** と呼ぶ.

(類推的図解) $B(x)$ の次数を m とおくと

m次式　$m+1$次式　$m+2$次式　$m+3$次式　$m+4$次式　……

計算による納得

例 $A(x) = x^3 + x^2 + 3x + 5 \quad B(x) = x^2 - x + 1$ のとき，両者の最高次の項に注目して下のように割り算を実行し，B よりも次数の低い式となったところでとめる.

$$x^2 - x + 1 \enclose{longdiv}{x^3 + x^2 + 3x + 5}$$

$A(x)$ を $B(x)$ で割ると，$\begin{cases} \text{商が} \\ \text{余りが} \end{cases}$

商と余りの計算の基本

$$3x+1\ \overline{)\ 3x^3 - 11x^2 + 3x + 5}$$

$3x^2 - 11x^2 + 3x + 5$ を $3x+1$ で割ったときの

商は　　　　　　　　　　　　余りは

割り切れるとは

　$A = BQ$ のとき，いいかえると，$R = 0$，つまり，「余りがない」とき，

A は B で **割り切れる**

という．また，B は A の **因数** (A は B の倍数) という．

例 $x^3 - 2x^2 + x - 2 =$

であるので，$x^3 - 2x^2 + x - 2$ は　　　　　　で割り切れる．
また，　　　　　　でも割り切れる．

2個以上の文字式の割り算

複数の文字を含む整式についても，その中の１つの文字に着目して割り算を行うことがある．

例

x についての整式として，
$4x^3-4x^2y-5xy-y^3$
を $2x+y$ で割り算すると
右のようになる．これより，

$$2x+y \,\overline{\big)\, 4x^3-4x^2y-5xy^2-y^3}$$