数学Ⅰ

第４章　「図形と計量」

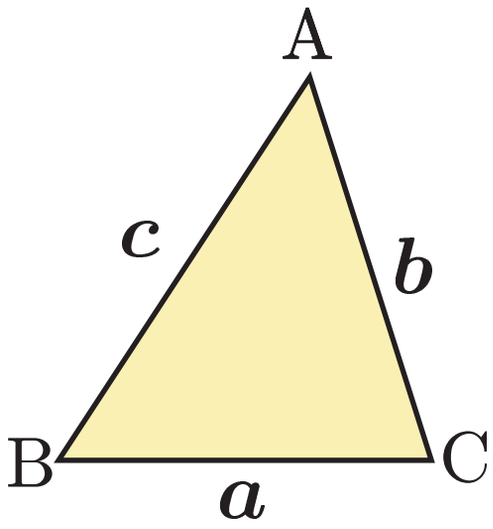
# 4. 余弦定理

# hm1-4-4

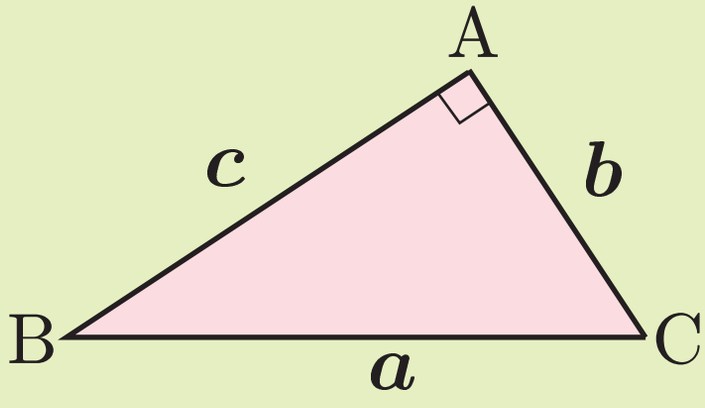
(pdfファイル)

# 余弦定理とは？　三平方の定理との関係

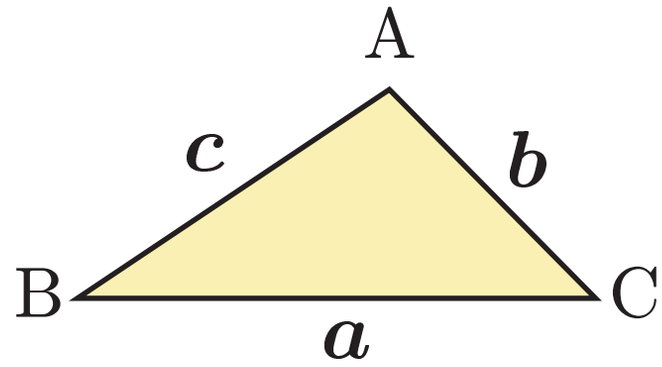
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$




$A = 90^\circ$ のとき




$$a^2 = b^2 + c^2$$




余弦定理は，三平方の定理（ピュタゴラスの定理）をその特別の場合として含む。

逆に，三平方の定理によって・・・・・・.

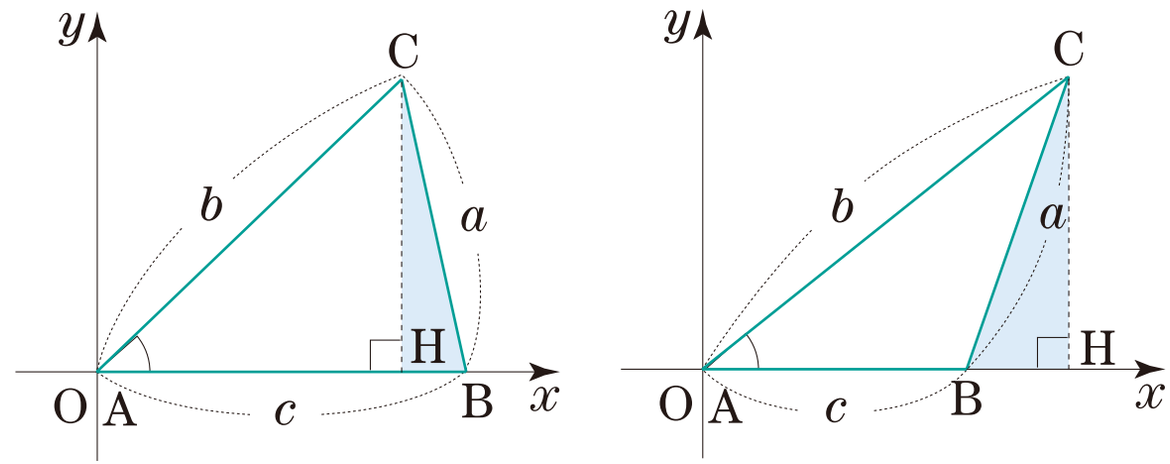
# 三平方の定理による余弦定理の証明

△ABC に対し，右図のように座標軸を定め，頂点 A, B, C の座標を，

A$(0, 0)$，B$(c, 0)$，

C(　　,　　)

とおく．




C から $x$ 軸に垂線 CH を下ろすと，

$$(\text{H の } x \text{ 座標}) = (\text{C の } x \text{ 座標}) = b\cos A$$

ゆえに，BH =

$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{BH}^2 + \mathrm{CH}^2 =$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

# 三平方の定理と余弦定理の不思議な関係

特別の場合として含む

余弦定理 $\rightleftarrows$ 三平方の定理

証明を与える

余弦定理は、三平方の定理の拡張である（余弦定理から三平方の定理が導かれる）とともに、三平方の定理に基づいて示される（三平方の定理から余弦定理が導かれる）ものである。

言い換えると、

三平方の定理と余弦定理は、数学的には、同値な定理である！

# 余弦定理の基本的応用

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ と同様に

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bc\cos C$$

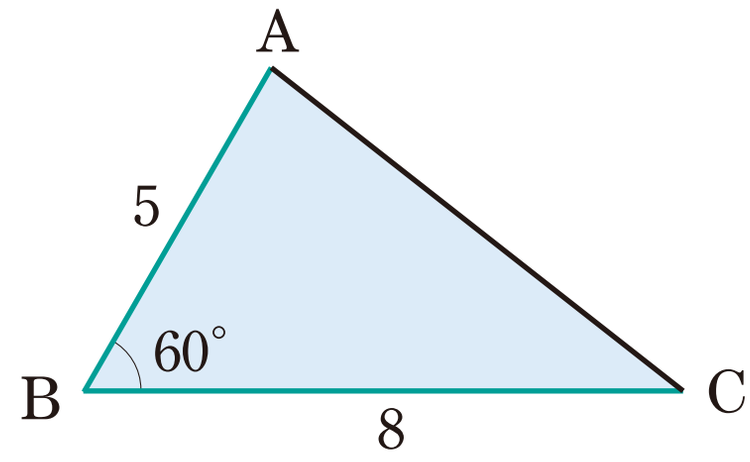
**例** △ABC において，

$c = 5,\ a = 8,\ B = 60^\circ$

のとき，

$b^2 =$

よって，$b =$



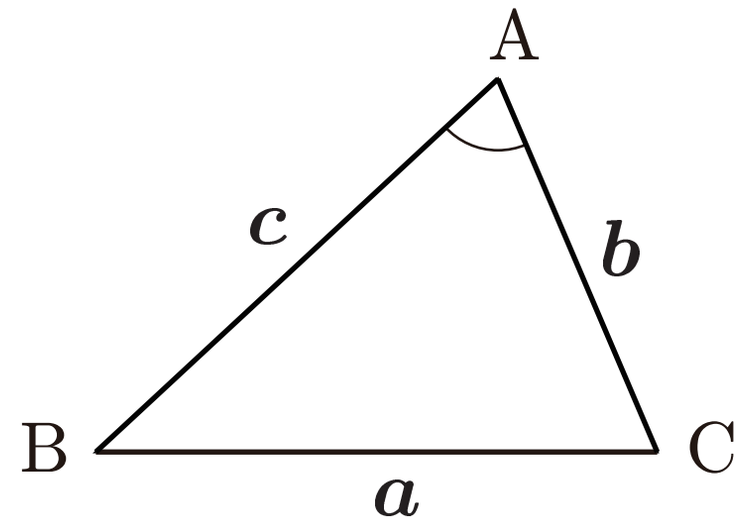

➡ このように「2辺夾(きょう)角」が与えられたときは余弦定理がすぐに使える．

# 余弦定理のもう一つの形

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

同様に，$\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$，　$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

　三角形は3辺の長さが与えられると決まるはずであるが，これらの公式により，3辺の長さから3角の大きさを決定することができる．



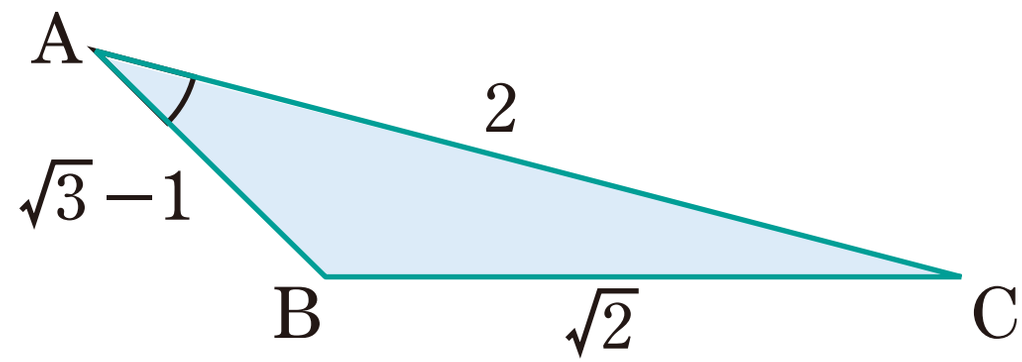
# 余弦定理の応用例（1）

△ABC において，

$a = \sqrt{2},\ b = 2,\ c = \sqrt{3} - 1$

のとき，

$\cos A =$



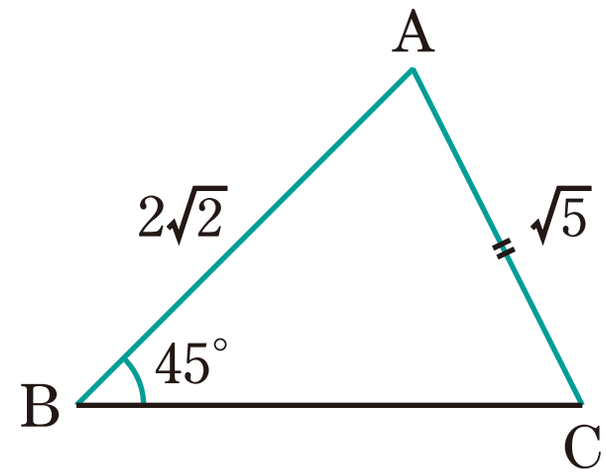

より，$A =$　　である．

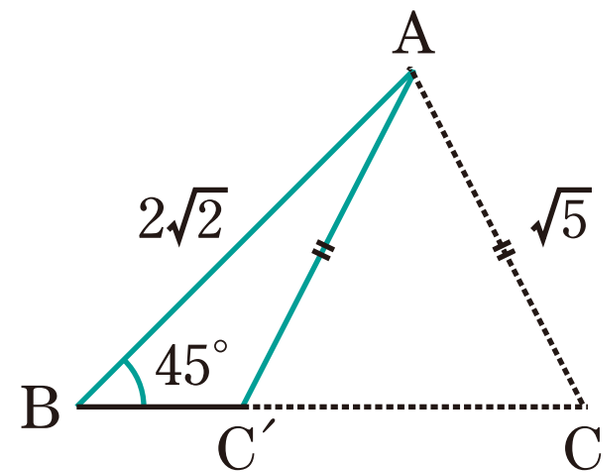
# 余弦定理の応用例（2）

**例題**

△ABC において，$B = 45^\circ$, $b = \sqrt{5}$, $c = 2\sqrt{2}$ のとき，$a$ を求めよ.

【解】　余弦定理により



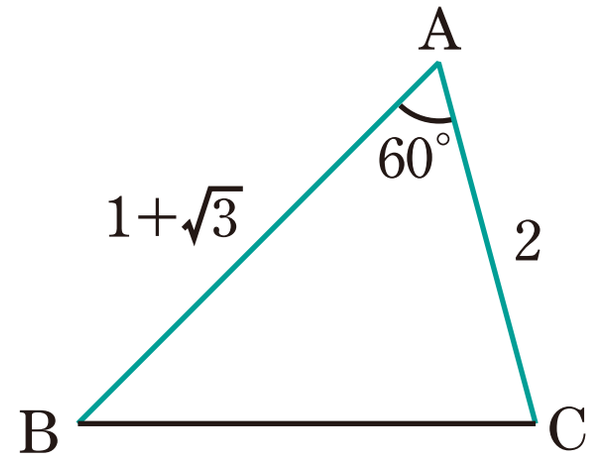




I-12201

**例題**

△ABC において，$A = 60^\circ$，$b = 2$，$c = 1 + \sqrt{3}$ のとき，$B$，$C$ を求めよ．

【解】　まず，$a$ を求める．余弦定理により




$$a^2 =$$

$$\therefore \quad a =$$

また，余弦定理により，

$$\cos B =$$

ゆえに，　$B =$

したがって，　$C =$

注　$B$ を求めるには正弦定理を使うこともできる．

# 直角，鋭角，鈍角の判定

△ABC において，余弦定理 $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ によると，$\cos A$ の値の符号 は，$b^2 + c^2 - a^2$ の値の符号 と同じである．

$A$ が鋭角，直角，鈍角のどれであるかは，$\cos A$ の値の符号が正，ゼロ，負のどれであるかで決まるので，次の関係が成り立つ．

$$A < 90^\circ \iff a^2 < b^2 + c^2$$

$$A = 90^\circ \iff a^2 = b^2 + c^2$$

$$A > 90^\circ \iff a^2 > b^2 + c^2$$

# 鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形の判定

△ABC について，$a$ が最大辺であるとすると，次の関係が成り立つ．

$$\triangle\mathrm{ABC}\text{が鋭角三角形} \iff a^2 < b^2 + c^2$$
$$\triangle\mathrm{ABC}\text{が直角三角形} \iff a^2 = b^2 + c^2$$
$$\triangle\mathrm{ABC}\text{が鈍角三角形} \iff a^2 > b^2 + c^2$$

**参考**

$a, b, c$ を3辺の長さとする三角形が存在する

$$\iff |b - c| < a < b + c$$

$$\iff \begin{cases} a < b + c \\ b < c + a \\ c < b + a \end{cases}$$

I-12302 end